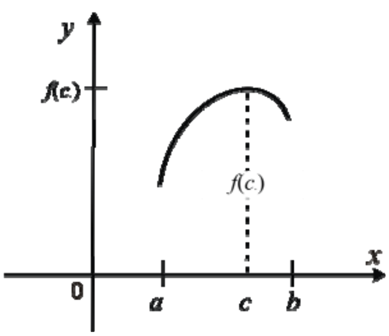
Capítulo 3:
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Dentro de las aplicaciones de las derivadas quizás una de las más importantes es la de conseguir los valores máximos y mínimos de una función. También la derivada es una herramienta muy útil para graficar funciones. Estos serán dos de los temas que trataremos en este capítulo.

3.1 Extremos absolutos y puntos críticos

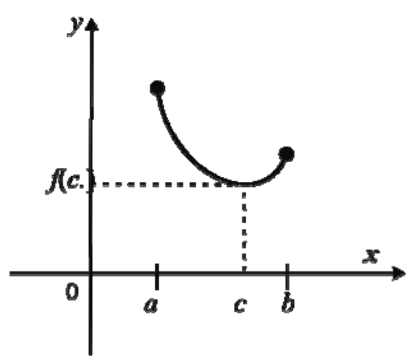
Un problema de mucho interés es buscar la mejor alternativa frente a muchas posibilidades de decisión. En términos matemáticos, muchas veces este planteamiento se traduce en buscar el máximo o el mínimo de una función y donde se alcanza este máximo o mínimo. Cuando la función es cuadrática se pueden determinar estos valores buscando el vértice de la gráfica de este tipo de función. Para funciones más generales, la derivada puede ayudar a resolver este problema. Recordemos primero la definición de valor máximo y mínimo.

Definición.- Sea *f* una función definida en un intervalo I y *c* un punto en I.
- $f(c)$ es el valor máximo absoluto de *f* en I si $f(c) \geq f(x)$ para todo *x* en I.
- $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de *f* en I si $f(c) \leq f(x)$ para todo *x* en I.



Si $f(c)$ es el valor máximo de *f* en I entonces se dice que *f* alcanza su valor máximo en $x=c$.

En la figura, el punto $(c, f(c))$ es el punto más alto de la gráfica de la función en I$=(a,b)$.

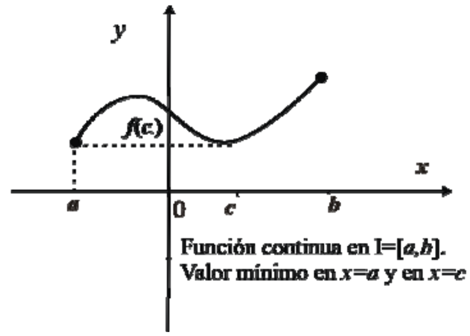


Los máximos o mínimos absolutos de una función son llamados extremos absolutos. La palabra absoluto suele ser omitida.

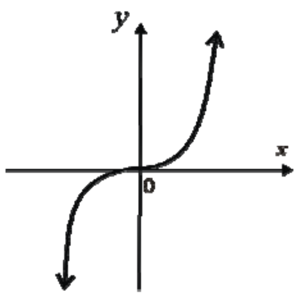
Observaciones:

1) Una función puede alcanzar un valor mínimo más de una vez.

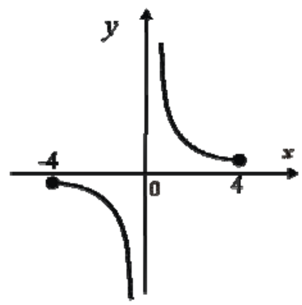
Similarmente puede alcanzar más de una vez un valor máximo.



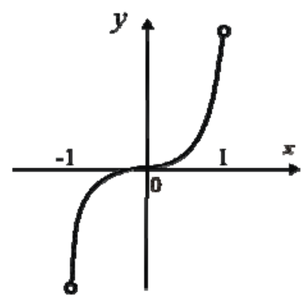
2) Hay funciones tales que en un intervalo tienen un máximo pero no tienen mínimo, otras no alcanzan ninguno de los dos extremos o alcanzan ambos. Abajo se muestran algunas posibilidades.



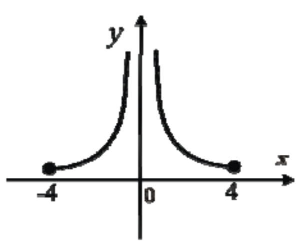
Función continua en R.
No hay ni máximos ni mínimos absolutos.



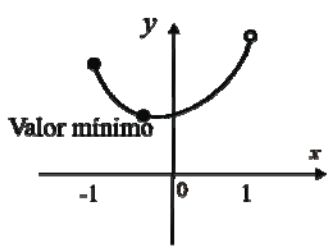
Función discontinua en [-4,4].
No hay ni máximos ni mínimos absolutos.



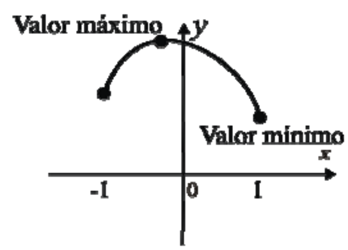
Función continua en el intervalo abierto (-1,1).
No hay ni máximos ni mínimos absolutos.



Función discontinua en [-4,4].
No hay máximo absoluto en este intervalo.
Se alcanza el mínimo en los extremos del intervalo.



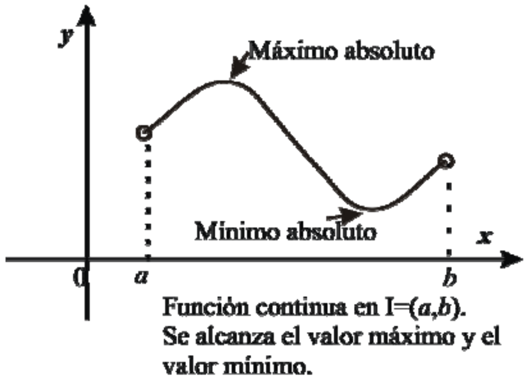
Función continua en el intervalo [-1,1).
No hay máximo absoluto.
Se alcanza mínimo absoluto dentro del intervalo.



Función continua en el intervalo cerrado [-1,1].
Se alcanza el valor máximo y el mínimo.

El siguiente teorema establece un resultado para la última situación: si la función es continua y el intervalo es cerrado entonces se puede asegurar la existencia de ambos extremos.

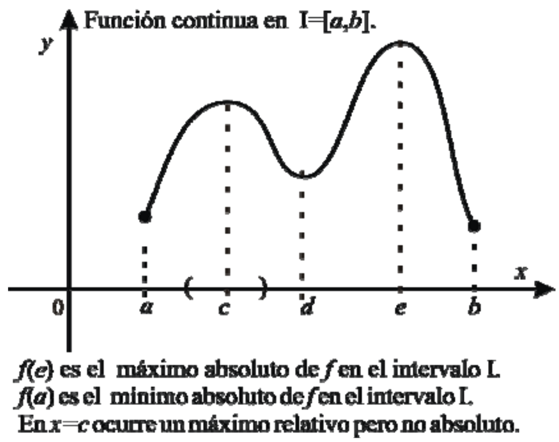
Teorema.- Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ entonces f alcanza un máximo y un mínimo absoluto en $[a,b]$.



Observación.- El Teorema da una garantía para que existan ambos extremos. Sin embargo algunas de las condiciones pudiesen no satisfacerse y alcanzarse ambos.

EXTREMOS RELATIVOS O LOCALES

En la figura observamos la gráfica de una función *f* tal que $f(e)$ es el valor máximo absoluto de *f*. El valor $f(c)$ no es el máximo absoluto, sin embargo podemos apreciar un intervalo abierto que contiene a c tal que $f(c)$ es el valor máximo absoluto de la función en ese intervalo. Este valor es un valor característico de la función y nos referiremos a él como un valor máximo relativo o local de la función. De manera similar hablaremos de un valor mínimo relativo $f(d)$ si este valor es el mínimo que tiene $f(x)$ para *x* cercanos a d. A continuación damos la definición formal.

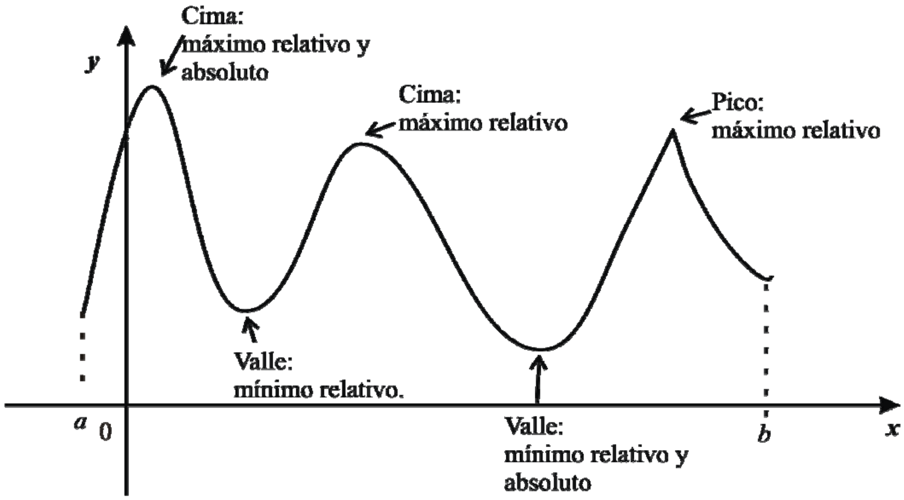


Definición.-

- Una función f tiene **un máximo relativo (o local)** en *c* si existe un intervalo abierto I en el dominio de f que contiene a *c* tal que $f(c)$ es el valor máximo absoluto en el intervalo.
- Una función f tiene **un mínimo relativo (o local)** en *c* si existe un intervalo abierto I en el dominio de f que contiene a c tal que $f(c)$ es el valor mínimo absoluto en el intervalo.

Hablaremos de **extremos relativos** para referirnos conjuntamente a los máximos y mínimos relativos. Una de las importancias de los extremos relativos es que nos ayudará a localizar los extremos absolutos de una función. Por ejemplo, en el caso de una función continua definida en un intervalo cerrado, si el máximo absoluto no se alcanza en un extremo del intervalo entonces ese máximo ocurre en un extremo relativo. El problema que trataremos, en lo que sigue, es centrar la búsqueda de los puntos *x* donde se alcanzan los extremos relativos. Los extremos relativos son fáciles de localizar a través de la derivada.

De una manera gráfica podemos decir que los máximos relativos son la cimas de la gráfica y los mínimos relativos son los valles.



La peculiaridad de estos puntos, por ejemplo las cimas, es que son:
1.- Cimas suaves, sin picos. En este caso la recta tangente es horizontal o
2.- Cima en forma de pico o angulosa, en este caso no hay derivada en ese punto.

Observaciones.-
1.-Conviene resaltar que de acuerdo a la definición dada, si una función definida en un intervalo $[a,b]$ alcanza un máximo o mínimo absoluto en uno de los extremos del intervalo, entonces ahí no hay máximo o mínimo relativo pues para ello debería estar definida la función en un intervalo abierto conteniendo el extremo y no lo está.
2.- Si un valor extremo de f en un intervalo cerrado $[a,b]$ no se alcanza ni en a ni en b, entonces ese valor extremo absoluto es también relativo.

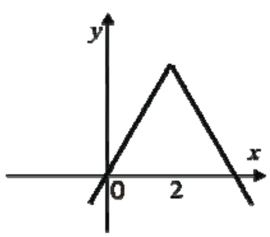
Los valores de x donde la derivada vale 0 o no existe la derivada serán los únicos candidatos donde se pueden presentar extremos relativos. Damos un nombre especial a estos valores.

Definición.- Sea c un punto en el dominio de f. Si $f'(c)=0$ o $f'(c)$ no está definida entonces c se denomina un número o **valor crítico** y $(c, f(c))$ **un punto crítico.**

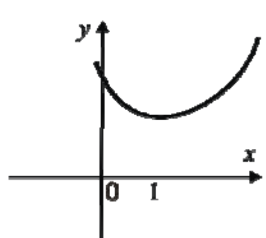
El siguiente Teorema es dado sin demostración.

Teorema.- Si f alcanza un extremo relativo en c entonces c es un valor crítico.

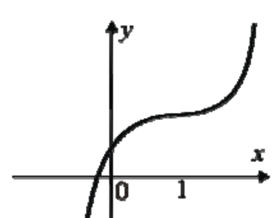
Observación.- En un punto crítico puede haber o no un extremo relativo.



En $x=2$ se alcanza un máximo relativo.
En este caso $f'(2)$ no está definida.



En $x=1$ se alcanza un mínimo relativo.
En este caso $f'(1)=0$.



En $x=1$ no se alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo.
En este caso $f'(1)=0$.

Remarcamos que el Teorema no dice que si un punto es crítico entonces hay un máximo o mínimo relativo en ese punto. Pero si que los puntos críticos son los únicos candidatos a máximos o mínimos relativos.

Ejemplo 1.- Encontrar los puntos críticos de la función $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x+1}$.
Solución: Observe que el dominio de la función son todos los reales. La derivada está dada por $f'(x)=\sqrt[3]{x+1}+\dfrac{x}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\dfrac{4x+3}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. Observe como la derivada se llevó a la forma $\dfrac{P}{Q}$. Se plantea ahora donde la derivada se hace 0 o no está definida.

- $f'(x)=0$

  $\dfrac{4x+3}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}=0$ Esto ocurre sólo cuando el numerador es 0, es decir

  $4x+3=0$

  $x=-3/4$
- $f'(x)$ no existe sólo cuando el denominador es 0, entonces planteamos

  $3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}=0$ Pasa el 3 dividiendo

  $(x+1)^{2/3}=0$ Se eleva ambos miembros a la 3/2.

  $\left((x+1)^{2/3}\right)^{3/2}=(0)^{3/2}$

  $(x+1)=0$

  $x=-1$.

Así los únicos puntos críticos de la función son $(-3/4, f(-3/4))$ y $(-1, f(-1))$, más explícitamente son $(-\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}})$ y $(-1,0)$.

Ejemplo 2.- Encontrar los puntos críticos de la función $f(x)=x^2\cdot e^{2x}$.
Solución: Observe que el dominio de la función son todos los reales. La derivada está dada por $f'(x)=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}$.

- La derivada f' está definida en todos los reales. Por consiguiente los únicos valores críticos son donde la derivada se hace cero.

  Se plantea $f'(x)=0$

  $2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=0$ Esta ecuación se resuelve por factorización, se saca $2xe^{2x}$ de factor común

  $2xe^{2x}(1+x)=0$ Planteamos tantas ecuaciones como factores

  $2x=0$ ó $e^{2x}=0$ ó $1+x=0$ La segunda ecuación no tiene solución.

Así x=0 y x=-1 son los únicos valores críticos y los puntos críticos son $(0, f(0))$ y $(-1, e^{-2})$.

EXTREMOS ABSOLUTOS EN INTERVALOS CERRADOS

Volviendo al tema de conseguir extremos absolutos de funciones continuas en un intervalo cerrado, debemos recordar que hay garantía de la existencia de ambos extremos alcanzándose o bien en los extremos del intervalo o bien donde se alcanza los extremos relativos dentro del intervalo. Pero como los extremos relativos son puntos críticos entonces ampliaremos nuestro radio de búsqueda a los extremos del intervalo y a los valores críticos: sólo en estos puntos se alcanza el valor máximo y el valor mínimo de la función. Para localizarlo sólo tenemos que evaluar la función en estos candidatos y el valor máximo de la evaluación de la *f* será el valor máximo de la función, similar análisis se hace con el mínimo. A continuación establecemos esta estrategia por pasos.

Estrategia para encontrar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$:
Paso 1.- Encontrar los valores críticos de f en $[a,b]$.
Paso 2.- Evaluar f en los valores críticos y en los extremos del intervalo: a y b.
Paso 3.- El valor evaluado más grande es el máximo y el menor el mínimo.

Ejemplo 3.- Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x)=x^3-3x^2-9x$ en el intervalo $[-2,2]$.

Solución: Como la función es continua (por ser polinomio) y el intervalo es cerrado seguimos los pasos dados arriba.

Paso 1.- Primero se calcula los valores críticos. Como la función es derivable en su dominio, sólo planteamos $f'(x)=0$ para encontrar los valores críticos.

$f'(x)=3x^2-6x-9=0$. Las soluciones de esta ecuación cuadrática son $x=-1$ y $x=3$.

Descartamos la segunda por no estar en el intervalo $[-2,2]$.

Paso 2.-Evaluamos f en los extremos del intervalo y en el valor crítico $x=-1$.

$$f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2-9(-2)=-8-12+18=-2$$

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)=-1-3+9=5$$

$$f(2)=(2)^3-3(2)^2-9(2)=8-12-18=-22$$

Paso 3.- $f(2)=-22$ es el valor mínimo.

$f(-1)=5$ es el valor máximo.

Ejemplo 4.- Encontrar los extremos absolutos de $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$ en el intervalo $[-3,1]$.

Solución: Como la función es continua (por ser composición de continuas) y el intervalo es cerrado seguimos los pasos dados arriba.

Paso 1.- Primero se calcula los valores críticos. La derivada es $f'(x)=\dfrac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}$

Debemos plantear donde $f'(x)=0$ o donde $f'(x)$ no existe a fin de encontrar los valores críticos.

- $f'(x)=0$

$\dfrac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}=0$ ocurre sólo cuando el numerador es 0, es decir

$2x=0$

$x = 0$

- $f'(x)$ no existe sólo cuando el denominador es 0, esto es

$3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-4)^2} = 0$

$(x^2-4)^{2/3} = 0$, Se eleva ambos miembros a la 3/2.

$\left((x^2-4)^{2/3}\right)^{3/2} = (0)^{3/2}$

$(x^2-4) = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Se descarta el valor crítico $x = +2$ por estar fuera del intervalo $[-3,1]$.

Paso 2.-Evaluamos f en los extremos del intervalo y en los valores críticos $x = -2$ y $x = 0$.

$f(-3) = \sqrt[3]{(-3)^2 - 4} = \sqrt[3]{5} \approx 1.71$

$f(-2) = \sqrt[3]{(-2)^2 - 4} = 0$

$f(0) = \sqrt[3]{0^2 - 4} = -\sqrt[3]{4} \approx -1.58$

$f(1) = \sqrt[3]{1^2 - 4} = -\sqrt[3]{3} \approx -1.44$.

Paso 3.- $f(0) = -\sqrt[3]{4}$ es el valor mínimo de la función.

$f(-3) = \sqrt[3]{5}$ es el valor máximo.

Ejercicio de desarrollo.- Encuentre los extremos absolutos de $y = x^4 - 2x^2$ en [1/2,3].

APLICACIONES

En muchos problemas de la vida real y de economía se quiere conseguir el valor máximo o mínimo de una cantidad que depende de la variable independiente la cual tiene restringido sus valores a un intervalo cerrado.

Ejemplo 5.- Una fábrica que elabora un producto tiene una capacidad de producción de 3.000 unidades al mes. La función de utilidad por producir y vender q unidades mensuales está dada por

$$U(q) = -100.000 + 60.000q + 985q^2 - \frac{1}{3}q^3 .$$

Encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad mensual.

Solución: Tenemos que conseguir donde se alcanza el máximo absoluto de la función U en el intervalo $[0,3000]$.

Como U es una función continua por ser un polinomio y queremos conseguir el máximo en un intervalo cerrado podemos aplicar el algoritmo de búsqueda dado en esta sección.

Paso 1.- Primero se calcula los valores críticos. Como la función tiene derivada en todas partes sólo planteamos $U'(q) = 0$ para encontrar los valores críticos.

$U'(q) = 60.000 + 1970q - q^2 = 0$. Las soluciones de esta ecuación cuadrática son $q = -30$ y $q = 2.000$, descartamos la primera por no estar en el intervalo $[0,3.000]$.

Paso 2.- Evaluamos U en los extremos del intervalo y en el valor crítico $q = 2.000$.

$U(0) = -100.000 + 60.000 \cdot 0 + 985 \cdot 0^2 - \frac{1}{3}0^3 = -100.000$

$U(2.000) = -100.000 + 60.000 \cdot 2000 + 985(2000)^2 - \frac{1}{3}(2000)^3$ =4.179.700.000/3

$U(3.000) = -100.000 + 60.000 \cdot 3000 + 985(3000)^2 - \frac{1}{3}(3000)^3$ =44.900.000.

Paso 3.- $U(2.000) = \frac{4.179.700.000}{3}$ es el valor máximo.

En conclusión el nivel de producción en que la utilidad es máxima es 2.000.

EJERCICIOS 3.1

1) Para las siguientes funciones:
a) Demuestre que su derivada es la dada.
b) Determine los valores críticos de la función.

1.1) $f(x) = x^2(x+3)^4 \to f'(x) = 6x(x+1)(x+3)^3$**;** **1.2)** $f(x) = (x^2+1)e^{-x} \to f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x}$**;**

1.3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \to f'(x) = 3(x-1)(x-3)$**;** **1.4)** $f(x) = x(1-x)^{2/5} \to f'(x) = \frac{5-7x}{5(1-x)^{3/5}}$**;**

1.5) $f(x) = 4x^4 - 2x^2 \to f'(x) = 4x(4x^2-1)$**;** **1.6)** $f(x) = e^x + e^{-x} \to f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$**;**

1.7) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \to f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$**;** **1.8)** $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \to f'(x) = \frac{2-x}{x^3}$**;**

1.9) $f(x) = \sqrt{x}(x-1) \to f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ en $[0,\infty)$**;**

1.10) $f(x) = x^2 \ln x \to f'(x) = x(2\ln x + 1)$ en $(0,\infty)$**.**

2) Encuentre los extremos absolutos de las funciones dadas en el intervalo indicado:

2.1) $y = x^2 - 2x + 3$ en [0,3]; **2.2)** $y = -x^2 + 2x + 4$ en [2,4];

2.3) $y = 3x - x^3$ en [-3,0]; **2.4)** $y = 3x - x^3$ en [-3,3];

2.5) $y = \frac{x^4}{2} - 2x^3 - 4x^2$ en [-3,0]; **2.6)** $y = \frac{x^4}{2} - 2x^3 - 4x^2$ en [-3,3];

2.7) $y = 2 + x^{4/3}$ en [-8,8]; **2.8)** $y = x^4 - 8x^2$ en [1,5];

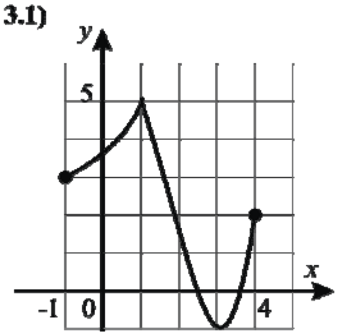
2.9) $y = x^3 + x$ en [1,5]; **2.10)** $y = \frac{2}{2+x^2}$, en [-1,2];

2.11) $y = \frac{x}{1+x^2}$, en [-1,2]; **2.12)** $y = \sqrt{x^3 - 27x}$ en [-4,0];

2.13) $y = e^{2x} - x$, en [-2,2]; **2.14)** $y = \ln x - x$, en [e^{-1},2].

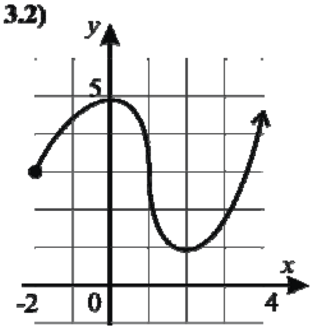
3) Usando la gráfica de la función, determine **a)** los valores críticos y explique la naturaleza de cada valor crítico; **b)** los extremos absolutos y relativos de la función y donde se alcanzan.

3.1)



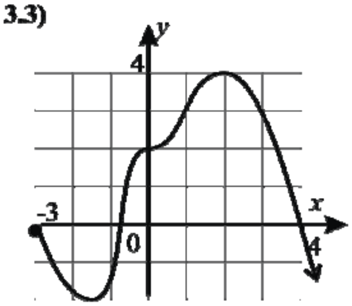
f definida en [-1,4]

3.2)



f definida en [-2,∞)

3.3)



f definida en [-3,∞)

PROBLEMAS

1) Una fábrica que elabora un producto tiene una capacidad de producción de 120 unidades diarias. La función de costo promedio está dada por

$$C(q)=100+30q+75.000/q\,.$$

Encuentre el nivel de producción que minimiza el costo promedio. **Respuesta:** 120 unidades.

2) El ingreso que puede obtener un barbero a la semana está dado por $I(q)=25p-\frac{p^2}{2}$, donde p es el precio del corte. Encuentre el precio que debe fijar a fin de obtener el máximo ingreso, **a)** si el corte no puede tener un precio mayor a 20UM; **b)** si el corte puede tener un precio mayor a 20UM. **Respuesta: a)** 20UM; **b)** 25UM.

Respuestas:

1.1) x=-3, 0, -1 ; **1.2)** x=1; **1.3)** x=1, 3; **1.4)** x=5/7, 1; **1.5)** x=-1/2, 1/2, 0; **1.6)** x=0; **1.7)** x=0 ; **1.8)** x=2; **1.9)** x=1/3; **1.10)** $x=1/\sqrt{e}$.

2.1) $f(3)=6$ Máximo absoluto; $f(1)=2$ Mínimo absoluto;

2.2) $f(2)=4$ Máximo absoluto; $f(4)=-4$ Mínimo absoluto;

2.3) $f(-3)=18$ Máximo absoluto; $f(-1)=-2$ Mínimo absoluto;

2.4) $f(-3)=18$ Máximo absoluto; $f(3)=-18$ Mínimo absoluto;

2.5) $f(-3)=117/2$ Máximo absoluto; $f(-1)=-3/2$ Mínimo absoluto;

2.6) $f(-3)=117/2$ Máximo absoluto; $f(3)=-99/2$ Mínimo absoluto;

2.7) $f(0)=2$ Mínimo absoluto; $f(-8)=f(8)=18$ Máximo absoluto;

2.8) $f(5)=425$ Máximo absoluto; $f(2)=-16$ Mínimo absoluto;

2.9) $f(5)=130$ Máximo absoluto; $f(1)=4$ Mínimo absoluto;

2.10) $f(0)=1$ Máximo absoluto; $f(2)=\frac{1}{3}$ Mínimo absoluto;

2.11) $f(1)=\frac{1}{2}$ Máximo absoluto; $f(-1)=-\frac{1}{2}$ Mínimo absoluto;

2.12) $f(0)=0$, Mínimo absoluto; $f(-3)=3\sqrt{6}$ Máximo absoluto;

2.13) $f(-\ln 2/2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$ Mínimo absoluto; $f(2)=e^4-2$ Máximo absoluto;

2.14) $f(1)=-1$ Máximo absoluto; $f(\frac{1}{e})=-1-\frac{1}{e}\approx-1{,}367$ Mínimo absoluto.

3.1) a) Valores críticos 1 y 3. En x=1 la derivada no está definida, en x=3 la derivada es cero.

b) Valor máximo absoluto y relativo =5 y se alcanza en x=1.
Valor mínimo absoluto y relativo =-1 y se alcanza en x=3.

3.2) a) Valores críticos 0, 1 y 2. En x=1 la derivada no está definida, en x=0 y x=2 la derivada es cero. **b)** Valor máximo relativo =5 y se alcanza en x=0. Valor mínimo absoluto y relativo =1 y se alcanza en x=2. La función no tiene máximo absoluto.

3.3) a) Valores críticos -3/2, 0 y 2. En todos estos valores la derivada es cero. **b)** Valor máximo absoluto y relativo =4 y se alcanza en x=2. Valor mínimo relativo =-2 y se alcanza en x=3/2. La función no tiene mínimo absoluto.

3.2 Monotonía. Criterio de la primera derivada

En esta sección usaremos la derivada de la función para determinar donde la función crece o decrece. Recordemos que los extremos relativos se presentan en los puntos críticos. También en esta sección veremos como usar el signo de la primera derivada para clasificar los puntos críticos como máximos o mínimos relativos o ninguno. Antes debemos dar la definición de funciones crecientes y decrecientes en un intervalo I.

Definición.-

- Una función f se dice **estrictamente creciente** en un intervalo I si para cualesquiera x_1, x_2 en I, donde $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.
- Una función f se dice **estrictamente decreciente** en un intervalo I si para cualesquiera x_1, x_2 en I, donde $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

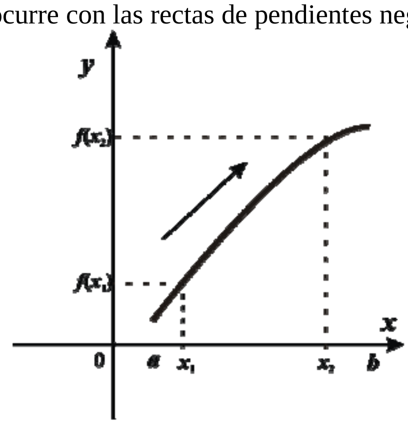
Observaciones:

1) La palabra estrictamente se suele omitir.

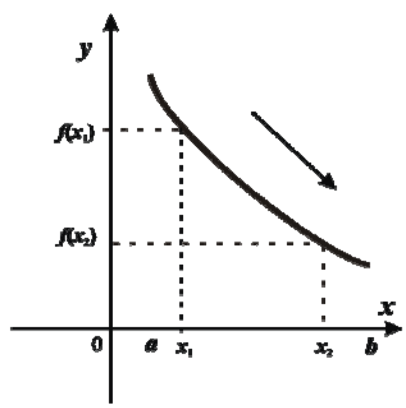
2) Si se cumple que $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) \le f(x_2)$, diremos que la función es no decreciente.

3) Una función es creciente si la gráfica de f asciende de izquierda a derecha. Esto ocurre con las rectas con pendientes positivas.

Similarmente una función decreciente tiene una gráfica que desciende de izquierda a derecha como ocurre con las rectas de pendientes negativas.

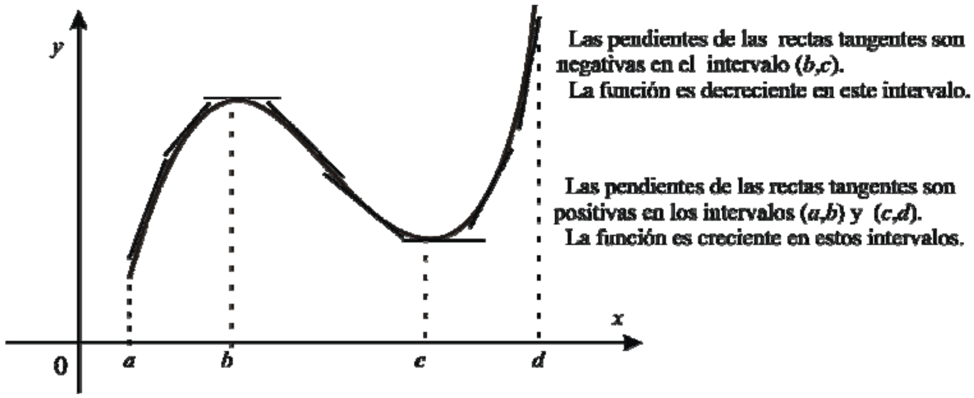


La función es creciente en el intervalo (*a*,*b*).



La función es decreciente en el intervalo (*a*,*b*).

Observe en el dibujo que en las zonas donde las pendientes de las rectas tangentes son negativas la función decrece y donde las pendientes de las rectas tangentes son positivas la función crece.



Recordando que la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto de una función diferenciable es la derivada en ese punto podemos entonces admitir el siguiente Teorema sin demostración.

Teorema.- Sea f una función diferenciable en (a,b) y continua en $[a,b]$

a) Si $f'(x)>0$ para todo x en (a,b) entonces f es creciente en $[a,b]$.

b) Si $f'(x)<0$ para todo x en (a,b) entonces f es decreciente en $[a,b]$.

Así que se debe detectar los posibles x´s donde ocurren cambios de signo en la primera derivada. Ellos son los números críticos y los puntos donde la propia función no está definida.

Observación.- Si f es una función continua entonces en los intervalos definidos por dos números críticos consecutivos el signo de la primera derivada es el mismo. Así que para determinar el signo de la primera derivada en un intervalo delimitado por estos puntos es suficiente tomar un punto x_p de prueba dentro del intervalo y evaluarlo en la primera derivada, el signo del intervalo será el signo de $f'(x_p)$.

Ejemplo 1.- Encontrar los intervalos donde $f(x)=x^3-3x^2-9x$ es creciente y decreciente

Solución: Observe que la función es continua por ser un polinomio.

Primero se calcula la primera derivada a fin de determinar los puntos críticos

$f'(x)=3x^2-3\cdot 2x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$. Los puntos críticos en este caso son donde la primera derivada se anula:

$3(x-3)(x+1)=0$.

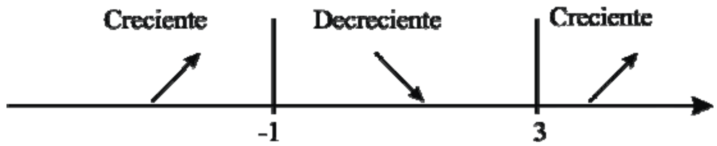
$(x-3)=0$ ó $(x+1)=0$

Estos son los números $x=-1$ y $x=3$.

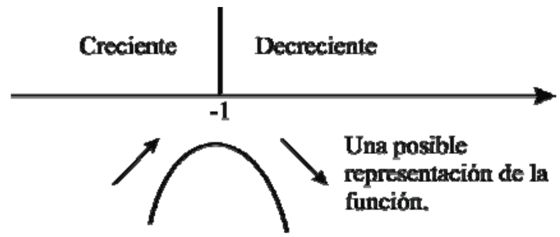
Estos dos puntos dividen la recta real en tres intervalos: $(-\infty,-1),(-1,3)$ y $(3,\infty)$. En cada uno de estos intervalos tomamos valores de prueba y evaluamos la primera derivada allí:

- En $(-\infty,-1)$ tomamos como valor de prueba $x_p=$-2. $f'(-2)=3\cdot(-5)(-1)=+15$. Entonces $f'(x)>0$ y por consiguiente la función f es creciente en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,3)$ tomamos como valor de prueba $x_p=0$. $f'(0)=3\cdot(-3)(1)=-9$. Entonces $f'(x)<0$ y por consiguiente la función f es decreciente en $(-1,3)$.
- En $(3,\infty)$ tomamos como valor de prueba $x_p=4$. $f'(4)=3\cdot(1)(5)=+15$. Entonces $f'(x)>0$ y por consiguiente la función f es creciente en $(3,\infty)$.

Siempre es conveniente resumir esta información en la recta real como ilustra el siguiente diagrama:



Comentario: Observe que en el ejemplo pasado la función crece a la izquierda de -1 y luego decrece. Al intentar de representar geométricamente esta situación nos damos cuenta que la función alcanza un máximo relativo en x=-1.

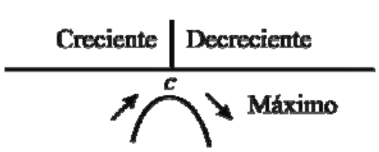


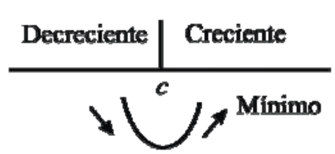
El comportamiento del signo de la primera derivada en torno al número crítico c permite clasificarlos. Esto se conocerá como el criterio de la primera derivada

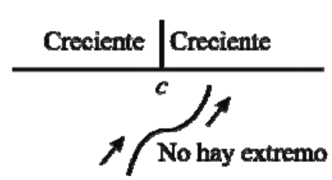
Criterio de la primera derivada para clasificar puntos críticos.
Sea f una función continua en un intervalo I= (a,b) y derivable en el intervalo excepto posiblemente en c, un número crítico, donde $a<c<b$.
1.- Si la primera derivada cambia de positiva a negativa al pasar por c entonces f alcanza un máximo relativo en $x=c$.
2.-Si la primera derivada cambia de negativa a positiva al pasar por c entonces f alcanza un mínimo relativo en $x=c$.
3.- Si el signo de la primera derivada no cambia al pasar por c entonces: f NO TIENE EXTREMOS en c.

Los siguientes pasos, para clasificar todos los puntos críticos, pueden resultarle al estudiante más visuales:

Pasos recomendados para clasificar puntos críticos de acuerdo al criterio de la primera derivada
1.- Colocar en la recta real todos los puntos críticos de la función, junto con los puntos donde la función es discontinua (estos últimos no son puntos críticos, pero si pueden ser puntos donde puede cambiar el signo de la primera derivada.)
2.- Dentro de cada intervalo limitado por estos puntos escogemos valores de prueba que evaluamos en la primera derivada.
Si la primera derivada es positiva entonces la función es creciente en ese intervalo, anotamos $\nearrow$
Si es negativa entonces la función es decreciente en ese intervalo y anotamos $\searrow$
3.- Se concluye
a.- Si la función crece a la izquierda de un punto crítico c y luego decrece entonces en c se alcanza un máximo relativo de f.
b.- Si la función decrece a la izquierda de un punto crítico c y luego crece entonces en c se alcanza un mínimo relativo de f.
c.- Si no hay cambio de monotonía en c entonces c no es un extremo relativo de f.







Ejemplo 2.- Determine los puntos críticos de la función $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2}$ y clasifique cada punto crítico como un máximo relativo o un mínimo relativo o ninguno de los dos, usando el criterio de la primera derivada.

Solución: Para derivar reescribimos la función como $f(x)=\frac{x^3}{x^2}+\frac{1}{x^2}=x+x^{-2}$.

(También se puede usar la regla del cociente)

$$f'(x)=1-2x^{-3}$$

$$f'(x)=1-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-2}{x^3}$$

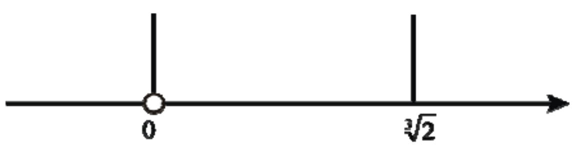
Observe como se escribió $f'(x)$ en la forma $\frac{P}{Q}$ a fin de localizar más rápidamente los números críticos.

Para buscar puntos críticos se plantea:

$$f'(x)=0$$

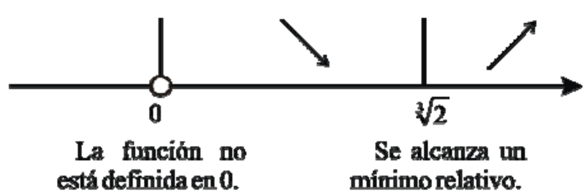
$x^3-2=0$, cuya única solución es $x=\sqrt[3]{2}$.

La derivada no está definida en $x=0$ (tampoco la función), este punto hay que colocarlo también en la recta real como delimitador de los posibles intervalos donde pueda cambiar el signo la primera derivada. $x=0$ es un número tal que la función no está definida allí, lo marcamos con un agujero en la recta real para recordarnos que no tiene sentido clasificarlo como máximo o mínimo pues ni siquiera la función está definida allí.



Estos dos puntos dividen la recta real en tres intervalos: $(-\infty,0),(0,\sqrt[3]{2})$ y $(\sqrt[3]{2},\infty)$. En los dos últimos tomaremos valores de prueba donde evaluaremos la primera derivada allí: Recuerde que queremos clasificar a $x=\sqrt[3]{2}$.

- En $(0,\sqrt[3]{2})$ tomamos como valor de prueba $x_p=1$. $f'(1)=f'(1)=\frac{(1)^3-2}{(1)^3}=-1$. Entonces $f'(x)<0$ y por consiguiente la función f es decreciente en $(0,\sqrt[3]{2})$.
- En $(\sqrt[3]{2},\infty)$ tomamos como valor de prueba $x_p=2$. $f'(2)=\frac{(2)^3-2}{(2)^3}=\frac{3}{4}>0$. Entonces $f'(x)>0$ en el resto del intervalo y por consiguiente la función f es creciente en $(\sqrt[3]{2},\infty)$.
- No hace falta analizar el intervalo $(-\infty,0)$, ya que no tiene sentido clasificar x=0.



Aplicando el criterio de la primera derivada se puede concluir que el punto $(\sqrt[3]{2}, f(\sqrt[3]{2}))$ es un mínimo relativo.

Recuerde que en 0 la función no está definida, sin embargo este valor delimita los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio de desarrollo: Para la función $f(x)=x^3-3x$ determine **a)** donde está creciendo o decreciendo; **b)** la posición de los máximos y mínimos relativos.

Con la ayuda de la información que aporta la primera derivada más los análisis de intersecciones y simetrías se puede hacer un bosquejo de la gráfica de la función. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.- Determine cuándo la función $f(x)=x^2(x+2)^2$ está creciendo o decreciendo; la posición de los máximos y mínimos relativos; intersecciones con los ejes que pueden conseguirse con métodos analíticos de resolución de ecuaciones conocidos. Bosqueje la gráfica de la función.

Solución:

Primero: Se calcula la primera derivada, se suele expresar en forma factorizada a fin de conseguir rápidamente los puntos críticos.

$f'(x)=2x(x+2)^2+x^2\cdot 2\cdot(x+2)=2x(x+2)[(x+2)+x]$. Se sacó factor común $2x(x+2)$

$f'(x)=2x(x+2)(2x+2)$.

Segundo: Se calcula los valores críticos. Como la función es un polinomio los únicos posibles números críticos son donde la primera derivada es 0.

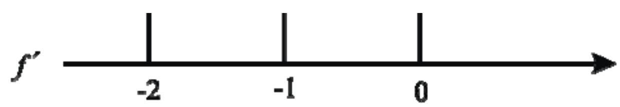
$$2x(x+2)(2x+2)=0$$

El conjunto solución está dado por las soluciones de:

$2x=0$, $(x+2)=0$ y $(2x+2)=0$

Las cuales son: $x=0,-2$ y -1. (Recuerde que un producto es cero si al menos uno de los factores es cero).

Tercero: Colocamos los puntos críticos en la recta real y tomamos valores de prueba dentro de los intervalos delimitados por ello. (En este caso la función está definida en todo **R**).



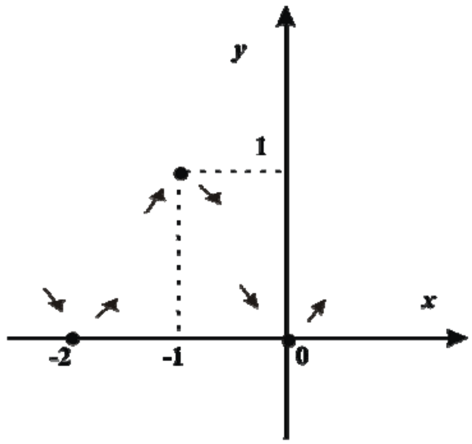
- En $(-\infty,-2)$. tomamos como valor de prueba $x_p=$-3, al evaluar en la primera derivada queda $f'(-3)<0$. Entonces $f'(x)<0$ en $(-\infty,-2)$ y por consiguiente la función f es decreciente en $(-\infty,-2)$. (**Comentario.-** Puede evitarse la cuenta exacta de $f'(-3)$, lo que interesa es su signo, vemos que al evaluar en la expresión factorizada $f'(-3)=2(-3)(-3+2)(2(-3)+2)$ hay exactamente tres factores negativos por consiguiente el producto es negativo.
- En $(-2,-1)$, tomamos como valor de prueba $x_p=$-1.5, al evaluar en la primera derivada se puede chequear fácilmente que $f'(-1.5)>0$. Entonces $f'(x)>0$ en $(-2,-1)$ y por consiguiente la función f es creciente en este intervalo.
- En $(-1,0)$, tomamos como valor de prueba $x_p=$-0.5 y evaluamos en la primera derivada: $f'(-0.5)<0$. Entonces $f'(x)<0$ en este intervalo y por consiguiente la función f es decreciente en $(-1,0)$.
- En $(0,\infty)$. $f'(2)>0$. Entonces $f'(x)>0$ en el resto del intervalo y por consiguiente la función f es creciente en $(0,\infty)$.

Esta información es colocada en el siguiente diagrama donde además podemos clasificar los extremos relativos. Debajo se ha colocado el plano cartesiano donde se realizará la gráfica, el eje de las *x* está cuadrado con la recta real que contiene la información de la primera derivada. Esto es, el eje *x* del plano cartesiano y la recta real están en correspondencia.

Es conveniente evaluar la función en los valores críticos
$f(-2)=0;\ f(-1)=1;\ f(0)=0$.

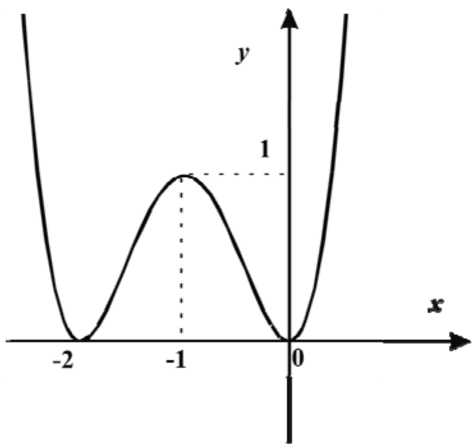
Se colocan estos puntos junto con otros característicos en una tabla de valores.

x	$y=f(x)$	Ptos. característicos
-2	0	Pto. crítico, corte
-1	1	Pto. crítico
0	0	Pto. crítico, corte



El primer punto y tercero coinciden en este caso con las intersecciones. Observe que en esta gráfica no hay simetrías.

Estos puntos se grafican en el plano cartesiano, luego las flechas que indican crecimiento o decrecimiento se trasladan antes y después de estos puntos, estas flechas indicarán como es la función antes y después de los puntos característicos.



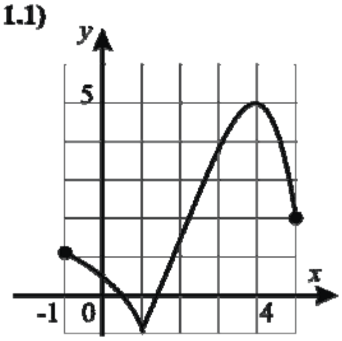
Un trazo suave que una estos puntos y siga la información del crecimiento obtenida permitirá obtener rápidamente un bosquejo de la gráfica.

Ejercicio de desarrollo: Determine cuándo la función $f(x)=x^4(1-\frac{x^2}{6})$ está creciendo o decreciendo; la posición de los máximos y mínimos relativos. Trace la gráfica.

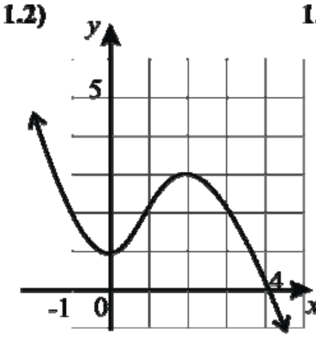
EJERCICIOS 3.2

1) Dada la gráfica de la función, estime los intervalos de crecimiento, decrecimiento, donde se alcanza los máximos y mínimos relativos. Estime además los puntos de cortes con los ejes y el dominio de la función.

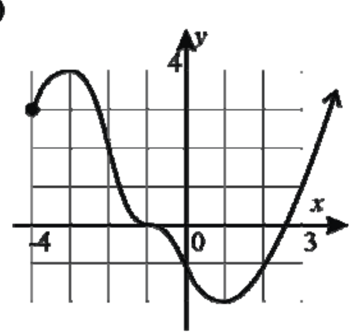
1.1)



1.2)



1.3)



2) Determine los puntos críticos de las funciones dadas y clasifique cada punto crítico como un máximo relativo o un mínimo relativo o ninguno de los dos, usando el criterio de la primera derivada.

2.1) $y = x^2 - 6x + 10$; **2.2)** $y = 2x^3 - 6x^2$; **2.3)** $y = x^6 - 2x^3$; **2.4)** $y = x^4 - 4x^2$;

2.5) $y = x + \frac{2}{x}$; **2.6)** $y = x\sqrt{x+1}$; **2.7)** $y = \sqrt[3]{x}(x+1)$; **2.8)** $y = \ln x - x$;

2.9) $y = x^4(x-1)^3$; **2.10)** $y = (x^2+1)e^{-2x}$.

3) Determine cuándo las funciones están creciendo o decreciendo y determine la posición de los máximos y mínimos relativos. No trace la gráfica.

3.1) $y = x^2 - x + 7$; **3.2)** $y = -x^2 - 3x + 4$; **3.3)** $y = 2x - x^2$;

3.4) $y = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 2x^2$; **3.5)** $y = 2 + x^2 - 2x^3$; **3.6)** $y = x^4 - 2x^2$;

3.7) $y = (1-x)^4(x+4)^5$; **3.8)** $y = \sqrt[3]{x}(1-x)$; **3.9)** $y = \frac{2+x^2}{x}$;

3.10) $y = -\frac{3}{x-1}$; **3.11)** $y = e^{-x}(2-x)$; **3.12)** $y = \ln x - x$;

3.13) $y = \frac{x}{e^x}$; **3.14)** $y = x^{1/3}(2+x)^4$.

4) Determine cuándo las funciones dadas están creciendo o decreciendo; la posición de los máximos y mínimos relativos; intersecciones con los ejes que pueden conseguirse con métodos analíticos de resolución de ecuaciones conocidos. Trace la gráfica.

4.1) $y = x^2 - 6x + 10$; **4.2)** $y = -x^2 - 6x + 10$; **4.3)** $y = x - 3x^2$;

4.4) $y = 2x^3 - 6x^2$; **4.5)** $y = x^4 - 2x^3$; **4.6)** $y = 2 + x^2 - 6x^3$;

4.7) $y = x^4 - 2x$; **4.8)** $y = 2 + 2x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$; **4.9)** $y = (2+x)^4$:

4.10) $y = \sqrt[3]{x^2}(x+1)$; **4.11)** $y = \sqrt{x+1}(x-1)$; **4.12)** $y = (x-2)^3(x+4)^5$;

4.13) $y = x^4(2-x)^3$; **4.14)** $y = xe^x$; **4.15)** $y = x^4 e^{-2x}$;

4.16) $y = e^{-x}(2-x)$; **4.17)** $y = x^{4/3}(2-x)^3$.

5) Para las siguientes funciones determine la posición de los máximos y mínimos relativos.

5.1) $f(x) = x^2(x+3)^4$; **5.2)** $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$; **5.3)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$;

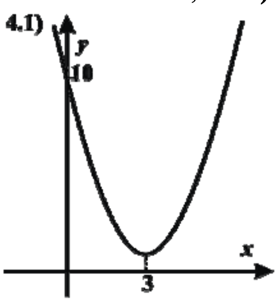
5.4) $f(x) = x(1-x)^{2/5}$; **5.5)** $f(x) = 4x^4 - 2x^2$; **5.6)** $f(x) = e^x + e^{-x}$;

5.7) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; **5.8)** $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; **5.9)** $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$ en $[0,\infty)$;

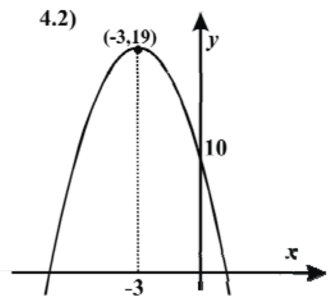
5.10) $f(x) = x^2 \ln x$ en $(0,\infty)$.

Respuestas: 1.1) $(-1,1)\cup(4,5)$ decrece; $(1,4)$ crece; Mínimo relativo (y absoluto) -1 y se alcanza en x =1. Máximo relativo (y absoluto) 5 y se alcanza en x=4; Cortes con el eje x en x=0.5 y en x=1.4. Cortes con el eje y en y=0.5; Dominio f =[-1,5]; **1.2)** $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ decrece; $(0,2)$ crece; Mínimo relativo 1 y se alcanza en x =0. Máximo relativo 3 y se alcanza en x=2; Cortes con el eje x en x=4. Cortes con el eje y en y=1; Dominio f =***R*.**; **1.3)** $(-3,-1)\cup(-1,1)$ decrece; $(-4,-3)\cup(1,\infty)$ crece; Mínimo relativo (y absoluto) -2 y se alcanza en x =1. Máximo relativo 4 y se alcanza en x=-3; Cortes con el eje x en x=-1 y en x=2.5. Cortes con el eje y en y=-1; Dominio $f = [-4,\infty)$.

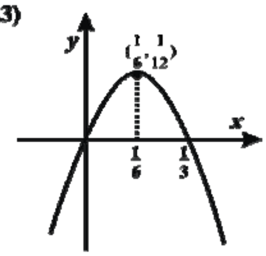
2.1) Mínimo relativo 1 en x=3; **2.2) M**áximo relativo 0 en x=0; Mínimo relativo -8 en x=2 **2.3) M**ínimo relativo -1 en x=1, en x=0 no hay extremo; **2.4)** Máximo relativo 0 en x=0; Mínimo relativo -4 en $x=-\sqrt{2}$ y en $\sqrt{2}$ **2.5) M**ínimo relativo $4/\sqrt{2}$ en $x=\sqrt{2}$; máximo relativo $-4/\sqrt{2}$ en $x=-\sqrt{2}$; **2.6)** Mínimo relativo $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ -4 en $x=-\frac{1}{3}$ **2.7**) Mínimo relativo $\sqrt[3]{0.25}\,(0.25+1)$ en x=-0.25; en x=0 no hay extremos. **2.8)** Máximo relativo -1 en x=1; **2.9) M**áximo relativo 0 en x=0, mínimo relativo -$(2/7)^4\,(3/7)^3$ en x=2/7. En x=1 no hay extremos. **2.10)** No hay extremos relativos.
3.1) $(-\infty,1/2)$ decrece; $(1/2,\infty)$ crece; **3.2)** $(-\infty,-3/2)$ crece; $(-3/2,\infty)$ decrece; **3.3)** $(-\infty,1)$ crece; $(1,\infty)$ decrece; **3.4)** $(-\infty,0)\cup(1,2)$ decrece; $(0,1)\cup(2,\infty)$ crece; **3.5)** $(-\infty,0)\cup(1/3,\infty)$ decrece, $(0,1/3)$ crece; **3.6)** $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ decrece; $(-1,0)\cup(1,\infty)$ crece; **3.7**) $(-11/9,1)$ decrece, $(-\infty,-4)\cup(-4,-11/9)\cup(1,\infty)$ crece; **3.8)** $(-\infty,0)\cup(0,1/4)$ crece; $(1/4,\infty)$ decrece; **3.9)** $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$ crece; $(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$ decrece; **3.10)** $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ crece
3.11) $(-\infty,3)$ decrece, $(3,\infty)$ crece; **3.12)** $(0,1)$ crece; $(1,\infty)$ decrece; **3.13**)$(-\infty,1)$ crece, $(1,\infty)$ decrece.
5.1) Mínimo relativo en x=-3 y 0; Máximo relativo en x=-1 ; **5.2)** x=1 punto crítico, pero no es extremo; **5.3)** Máximo relativo en x=1; Mínimo relativo en x=3; **5.4)** Máximo relativo en x=5/7; minimo relativo en x=1; **5.5)** Mínimo relativo en x=-1/2 y 1/2, máximo relativo en x=0; **5.6)** minímo relativo en x=0; **5.7**) Mínimo relativo en x=0 ; **5.8)** Máximo relativo en x=2; **5.9) M**ínimo relativo en x=1/3; **5.10)** Mínimo relativo en $x=1/\sqrt{e}$.

4.1)


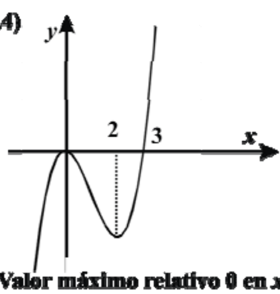
Mínimo relativo 1 en x=3
Decrece $(-\infty,3)$
Crece $(3,\infty)$
No hay corte con x

4.2)


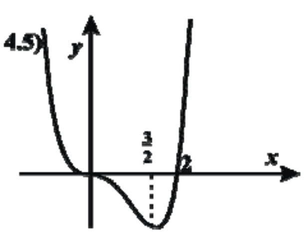
Valor máximo 19 en x=-3
Crece $(-\infty,-3)$
Decrece $(-3,\infty)$
Cortes con los ejes:$(-3\pm\sqrt{19},0)$,(0,10)

4.3)


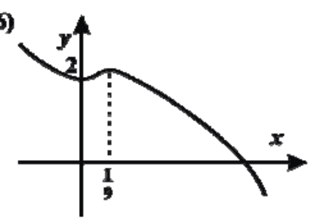
Máximo 1/12 en x=1/6
Crece: $(-\infty,1/6)$
Decrece: $(1/6,\infty)$
Cortes: (1/3,0) y (0,0)

4.4)


Valor máximo relativo 0 en x=0
Valor mínimo relativo -8 en x=2
Crece $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$
Decrece (0,2)
Cortes: (0,0) y (3,0)

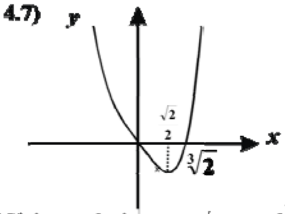
4.5)


Punto crítico en x=0. No hay extremo.
Mínimo relativo -27/16 en x=3/2
Crece $(3/2,\infty)$
Decrece $(-\infty,0)\cup(0,3/2)$

4.6)


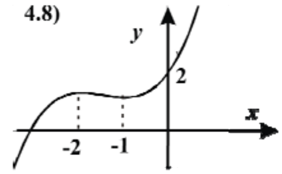
Valor máximo rel. 2.0041.. en x=1/9
Valor mínimo rel. 2 en x=0
Crece (0,1/9)
Decrece $(-\infty,0)\cup(1/9,\infty)$
Cortes con x: Hay corte, pero no se pueden conseguir con los métodos vistos.

4.7)



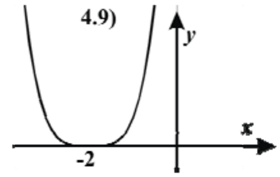
Mínimo relativo $0.25-\sqrt{2}$ **en** $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
Crece: $(\sqrt{2}/2,\infty)$
Decrece $(-\infty,\sqrt{2}/2)$
Cortes: $(0,0),(0,\sqrt[3]{2})$

4.8)



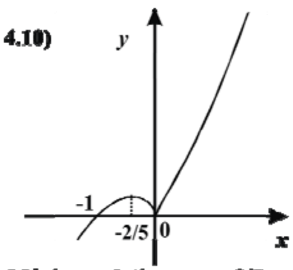
Máximo relativo 4/3 en $x=-2$
Mínimo relativo 7/6 en $x=-1$
Crece: $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$
Decrece: (-2,-1)
Cortes con x**: No se pueden conseguir con los métodos algebraicos vistos.**
Corte con y**: (0,2)**

4.9)



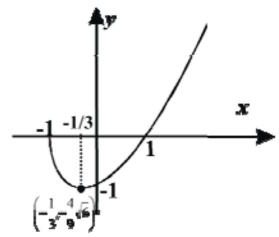
Mínimo relativo 0 en $x=-2$
Crece: $(-2,\infty)$
Decrece: $(-\infty,-2)$
Cortes con los ejes: (-2,0) y (0,16)

4.10)



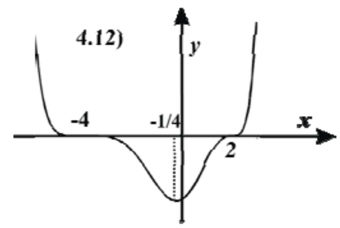
Máximo relativo en $x=-2/5$
Mínimo relativo en $x=0$
Crece: $(-\infty,-2/5)\cup(0,\infty)$
Decrece:(-2/5,0)

4.11)



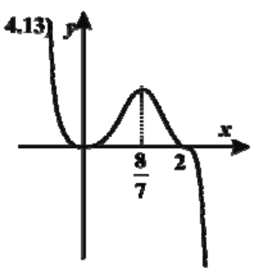
Mínimo relativo $-\frac{4}{9}\sqrt{6}$ **en** $x=-1/3$
Crece: $(-1/3,\infty)$
Decrece:(-1,-1/3)
Cortes con los ejes: (-1,0),(1,0) y (0,-1)

4.12)



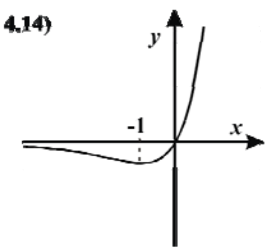
Mínimo relativo -8847,0 en $x=-1/4$
Crece: $(-1/4,2)\cup(2,\infty)$
Decrece: $(-\infty,-4)\cup(-4,-1/4)$
Cortes con los ejes: (-4,0),(2,0),(0,2^{15})

4.13)



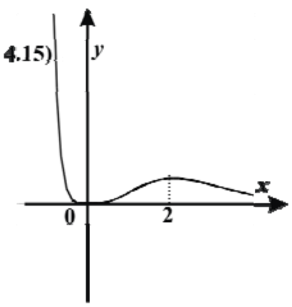
Máximo relativo en $x=8/7$
Mínimo relativos en $x=0$**.**
Crece: (0,8/7)
Decrece: $(-\infty,0)\cup(8/7,2)\cup(2,\infty)$
Cortes con los ejes: (0,0) y (2,0)

4.14)



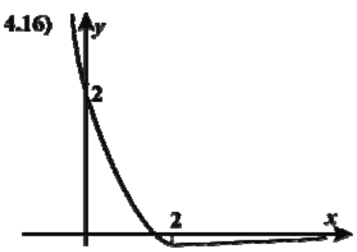
Valor mínimo relativo $-e^{-1}$ **en** $x=-1$
Decrece: $(-\infty,-1)$
Crece: $(-1,\infty)$
Corte con los ejes: (0,0)

4.15)



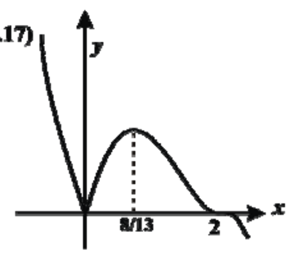
Valor máximo relativo $16e^{-4}$ **en** $x=2$
Valor mínimo relativo 0 en $x=0$**.**
Crece: (0,2)
Decrece: $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$
Corte con los ejes: (0,0)

4.16)



Valor mínimo relativo $-e^{-3}$ **en** $x=3$
Crece: $(3,\infty)$
Decrece: $(-\infty,3)$
Cortes con los ejes: (2,0) y (0,2)

4.17)



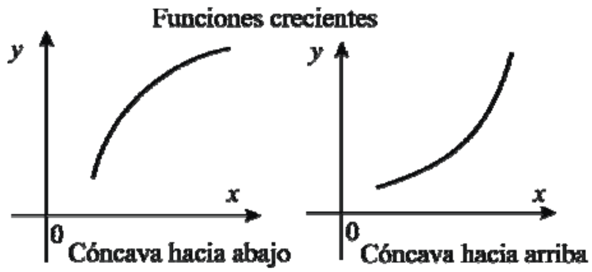
Máximo relativo en $x=8/13$
Mínimo relativo 0 en $x=0$
Crece: (0,8/13)
Decrece: $(-\infty,0)\cup(8/13,2)\cup(2,\infty)$
Cortes con los ejes: (0,0) y (2,0)

3.3 Concavidad

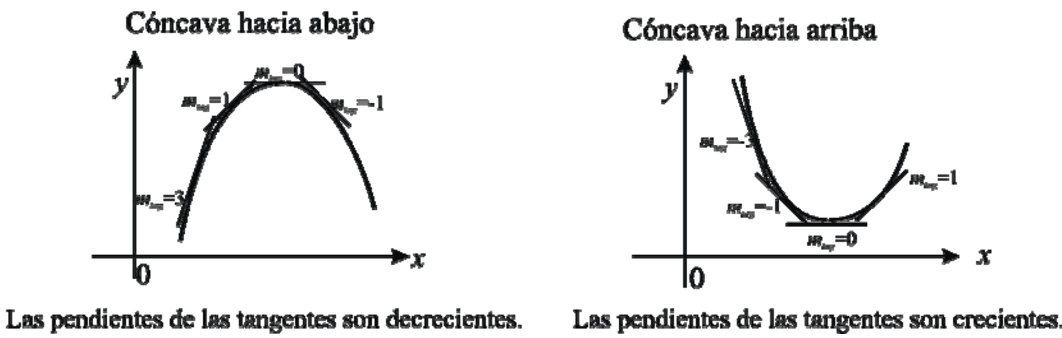
Hemos visto como la primera derivada nos da información del comportamiento de las gráficas de funciones, más específicamente cuando la curva crece y decrece y donde se localizan sus máximos y mínimos relativos.

La segunda derivada también aporta información sobre la gráfica, ella dirá cuando la gráfica se curva hacia abajo y cuando hacia arriba. En el primer caso se hablará de concavidad hacia abajo y en el segundo concavidad hacia arriba.

En la figura están las gráficas de dos funciones crecientes con distinto tipo de concavidad.



La figura de abajo permite apreciar las relaciones entre las tangentes a una curva y la concavidad.



Tendremos las siguientes conexiones entre las rectas tangentes y concavidad:

1.- Si la gráfica es cóncava hacia abajo entonces las tangentes están por encima de la curva alrededor del punto de tangencia. Por otro lado si la gráfica es cóncava hacia arriba, las tangentes están por abajo de la gráfica de la función en una vecindad del punto de tangencia.

2.- Si la gráfica es cóncava hacia abajo las pendientes de las rectas tangentes decrecen cuando x crece. Similarmente si una gráfica es cóncava hacia arriba las pendientes crecen.

Recordemos que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en x_0 es la derivada en x_0. Así que el concepto de concavidad está ligado al crecimiento de la primera derivada. Damos entonces la siguiente definición de concavidad.

Definición.- Sea f derivable en un intervalo abierto I.

- Se dice que f es cóncava hacia abajo en I si f' es decreciente en ese intervalo.
- Se dice que f es cóncava hacia arriba en I si f' es creciente en ese intervalo.

Diremos que la gráfica de una función es cóncava hacia arriba en un intervalo I, si la función lo es en ese intervalo.

Ya sabemos que para ver crecimiento de una función en un intervalo se examina el signo de su derivada. En este caso se quiere analizar el crecimiento de f', así que la derivada de ella, que es la segunda derivada f'', es la que tenemos que examinarle el signo. El siguiente criterio será útil para buscar intervalos de concavidad.

Criterio de concavidad.- Sea f dos veces derivable en un intervalo abierto *I*.

- Si $f''(x) < 0$ para todo x en ese intervalo entonces f es cóncava hacia abajo en *I*
- Si $f''(x) > 0$ para todo x en ese intervalo entonces f es cóncava hacia arriba en *I*.

Para determinar los intervalos de concavidad de una función, es decir encontrar los intervalos donde la gráfica de la función es cóncava hacia arriba y los intervalos donde es cóncava hacia abajo seguiremos los siguientes pasos.

Pasos recomendados para conseguir intervalos de concavidad.

Paso 1.- Determinar los x donde $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no está definida (incluye los puntos donde la propia función no está definida).

Paso 2.- Colocar en la recta real los x donde $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no está definida.

Paso 3.- Dentro de cada intervalo limitado por estos puntos escogemos valores de prueba que evaluamos en la segunda derivada.

- Si la segunda derivada es positiva en el valor de prueba entonces la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo.
- Si la segunda derivada es negativa en el valor de prueba entonces la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Ejemplo 1.- Determine los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de la función $f(x) = x^6 - 10x^4 - 4x - 1$.

Solución: Calculamos la segunda derivada

$$f'(x) = 6x^5 - 40x^3 - 4$$

$$f''(x) = 30x^4 - 120x^2$$

La expresamos factorizada a fin de encontrar la solución de la ecuación que plantearemos.

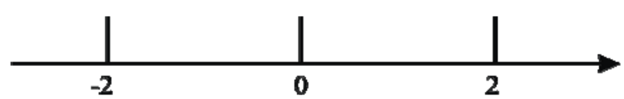
$$f''(x) = 30x^2(x^2 - 4)$$

Paso 1.- Buscamos los candidatos a cambios de inflexión. Planteamos donde la segunda derivada es 0

$$f''(x) = 30x^2(x^2 - 4) = 0$$

Las soluciones son cuando $x^2 = 0$ y $(x^2 - 4) = 0$. Así $x = 0, \pm 2$, son los únicos puntos candidatos donde pueden ocurrir cambios de concavidad.

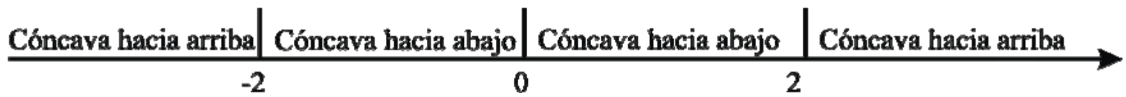
Paso 2.- Procedemos a colocarlos en la recta real y a tomar valores de prueba en los intervalos delimitados por ellos para evaluarlos en la segunda derivada.



Paso 3.-

- En $(-\infty,-2)$, se toma como valor de prueba $x_p = -3$, al evaluar obtenemos $f''(-3) > 0$. Entonces $f''(x) > 0$ y por consiguiente la función f es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)$.
- En $(-2,0)$, se toma como valor de prueba $x_p = -1$, al evaluar obtenemos $f''(-1) < 0$. Entonces $f''(x) < 0$ en (-2,0) y por consiguiente f es cóncava hacia abajo en $(-2,0)$.
- En $(0,2)$, se toma como valor de prueba $x_p = 1$, al evaluar obtenemos $f''(1) < 0$. Entonces $f''(x) < 0$ en (0,2) y por consiguiente la función f es cóncava hacia abajo en $(0,2)$.
- En $(2,\infty)$, se toma como valor de prueba $x_p = 3$, al evaluar obtenemos $f''(3) > 0$. Entonces $f''(x) > 0$ y por consiguiente la función f es cóncava hacia arriba en $(2,\infty)$.

Estos resultados los representamos gráficamente en el siguiente diagrama



En conclusión la función es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-2,0)\cup(0,2)$.

En este ejemplo hubo un cambio de concavidad en $x=-2$ y en $x=2$. Además en estos puntos la función es continua. Estos son puntos sobre la gráfica de la función donde se produce el cambio de una curvatura hacia arriba a una hacia abajo. Estos son puntos característicos de la gráfica de una función por lo cual merece un nombre especial.

Definición.- Un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de f se llama **un punto de inflexión** si f es continua y cambia de concavidad en dicho punto.

En el ejemplo anterior no hay punto de inflexión en $x=0$, aún cuando era un candidato para ser punto de inflexión, pues no ocurre un cambio de concavidad.

Los puntos donde $f''(x)=0$ o donde la segunda derivada no está definida son candidatos a puntos de inflexión. No necesariamente son puntos de inflexión, así como ocurrió en $x=0$ del ejemplo anterior. En el siguiente ejemplo mostraremos una situación donde en un punto hay cambio de concavidad pero no se llamará de inflexión pues la gráfica se corta en ese punto, valga la redundancia: la gráfica no se flexiona para cambia de concavidad sino que se corta.

Ejemplo 2.- Determine los intervalos en que la función $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo. Encontrar todos los puntos de inflexión.

Solución: Calculamos la segunda derivada

$$f'(x)=2x-x^{-2}$$

$$f''(x)=2+2x^{-3}=\frac{2(x^3+1)}{x^3}.$$

Esta última manera de expresar la segunda derivada nos permitirá conseguir los puntos donde ella es 0.

Paso 1.- Buscamos los candidatos a cambios de inflexión:

- Puntos donde la segunda derivada se hace 0.

  $$\frac{2(x^3+1)}{x^3}=0$$

  Una fracción es cero sólo si su numerador es cero. Así la segunda derivada es cero si

  $$2(x^3+1)=0$$

  $$x^3=-1$$

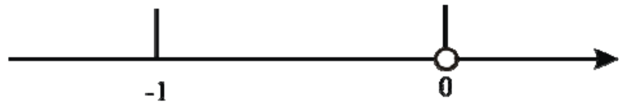
  Así, en este caso el punto donde la segunda derivada se hace cero es $x=-1$.

- Puntos donde la segunda derivada no existe.

  En este caso es donde el denominador se hace 0, esto es $x^3=0$, es decir $x=0$.

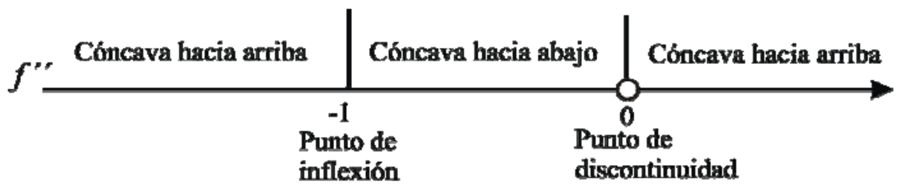
Paso 2.- En x=0 **la función no está definida**, así que lo representaremos en la recta real con un **círculo agujereado**, como ya se ha hecho anteriormente.

Colocamos también $x=-1$ en la recta real.



Paso 3.- Tomamos valores de prueba en los intervalos delimitados por ellos, para evaluarlos en la segunda derivada

- En $(-\infty,-1)$, tomamos $x_p=-2$. $f''(-2)>0$. Entonces $f''(x)>0$ y por consiguiente la función f es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,0)$ tomamos $x_p=-0.5$. $f''(-0.5)<0$. Entonces $f''(x)<0$ y por consiguiente la función f es cóncava hacia abajo en $(-1,0)$.
- En $(0,\infty)$ tomamos $x_p=1$. $f''(1)>0$. Entonces $f''(x)>0$ y por consiguiente la función f es cóncava hacia arriba en $(0,\infty)$.



- En $x_0=-1$ hay un cambio de concavidad y la función es continua, por lo tanto el punto $(-1, f(-1))=(-1,0)$ es un punto de inflexión.
- Sin embargo, en x=0 aún cuando hay cambio de concavidad no es punto de inflexión porque la función no es continua allí.

Ejercicio de desarrollo: Determine los intervalos de concavidad y los valores de x en que se presentan los puntos de inflexión de $y=\dfrac{x^4-3}{x}$. No trace la gráfica.

EJERCICIOS 3.3

1) Determine los intervalos de concavidad y los valores de x en que se presentan los puntos de inflexión de las funciones dadas abajo. No trace la gráfica

1.1) $y=x^2-x-6$; **1.2)** $y=-x^3-3x+4$; **1.3)** $y=1+6x^2-x^3$;

1.4) $y=\dfrac{x^4}{2}-2x^3+3x^2-4x-5$; **1.5)** $y=x^4-2x^2$; **1.6)** $y=\dfrac{2+x^2-2x^3}{2}$;

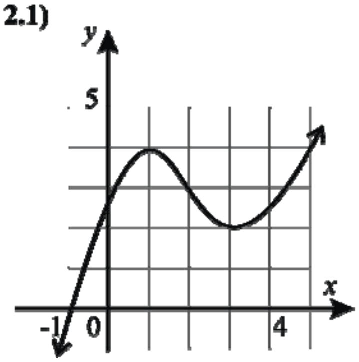
1.7) $y=\dfrac{2}{x}-x$; **1.8)** $y=\dfrac{2+x^2}{x}$; **1.9)** $y=-\dfrac{3}{x-1}$;

1.10) $y=\sqrt[3]{x}\,(1-x)$; **1.11)** $y=(1-x^2)^4$; **1.12)** $y=\dfrac{x}{e^x}$;

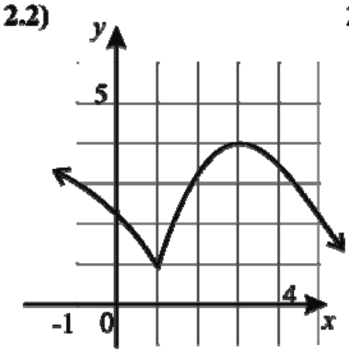
1.13) $y=\ln x-x$; **1.14)** $y=e^{-x}(2-x)$.

2) A partir de la gráfica de la función estime: **a)** Intervalos de concavidad**; b)** Puntos de inflexión**. c)** Intervalos donde $f'(x) > 0$.

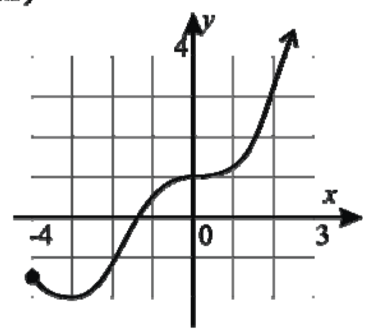
2.1)



2.2)



2.3)



Respuestas: 1.1) Cóncava hacia arriba en $(-\infty,\infty)$;**1.2) R; 1.3**) Cóncava hacia arriba en $(-\infty,2)$; Cóncava hacia abajo en $(2,\infty)$; **1.4)** $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ concavidad hacia arriba **1.5)** Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-\sqrt{1/3}\,)\mathrm{U}(\sqrt{1/3},\infty)$; Cóncava hacia abajo en $(-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3})$; **1.6)** Cóncava hacia arriba en $(-\infty,1/6)$; cóncava hacia abajo en $(1/6,\infty)$; ; **1.7)** Cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$; Cóncava hacia arriba en $(0,\infty)$; **1.8))** Cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$; Cóncava hacia arriba en $(0,\infty)$; **1.9)** Cóncava hacia arriba en $(-\infty,1)$; Cóncava hacia abajo en $(1,\infty)$; **1.10)** Cóncava hacia arriba en $(-1/2,0)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1/2)\cup(0,\infty)$; **1.11)** Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-\sqrt{1/7}\,)\mathrm{U}\ (\sqrt{1/7},\infty)$; Cóncava hacia abajo en $(-\sqrt{1/7},\sqrt{1/7})$; **1.12)** Cóncava hacia arriba en $(-\infty,1)$; cóncava hacia abajo en $(1,\infty)$; **1.13)** Cóncava hacia abajo en $(0,\infty)$; **1.14)** Cóncava hacia arriba en $(4,\infty)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty,4)$.

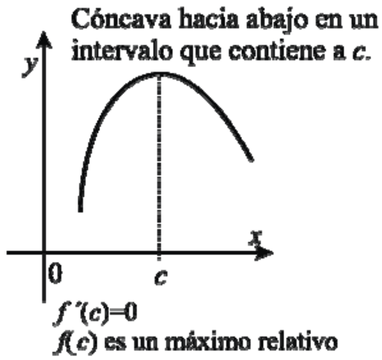
2.1a) Cóncava hacia arriba en $(2,\infty)$; Cóncava hacia abajo en $(-\infty,2)$; **b)** Punto de inflexión en *x*=2; **c)** $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$.

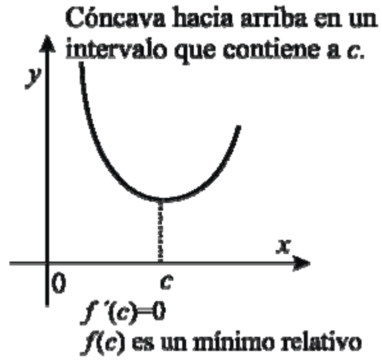
2.2a) Cóncava hacia abajo en $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$; **b)** No hay; **c)** $(1,3)$

2.3a) Cóncava hacia arriba en $(-4,-2)\cup(0,\infty)$; Cóncava hacia abajo en $(-2,0)$; **b)** Punto de inflexión en *x*=-2; **c)** $(-3,0)\cup(0,\infty)$.

3.4 Criterio de la segunda derivada

Otra de las aplicaciones de la segunda derivada es para clasificar los puntos críticos donde la primera derivada se anula. La idea es muy gráfica: si *c* es un punto donde $f'(c)=0$ y *f* es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a *c* entonces $f(c)$ es un máximo relativo, pero en cambio si es cóncava hacia arriba entonces se alcanza un mínimo relativo en *c*.





La relación entre concavidad y segunda derivada nos permite visualizar el siguiente criterio usado para clasificar puntos críticos.

Criterio de la segunda derivada.- Sea *f* una función tal que $f'(c)=0$ y con segunda derivada definida en *c*.

- Si $f''(c)<0$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo de *f*.
- Si $f''(c)>0$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de *f*.

Observaciones:

1.- El criterio no es concluyente en el caso en que $f'(c)=0$ y $f''(c)=0$. Se deberá entonces usar el criterio de la primera derivada.

2.- El criterio no puede usarse en el caso que la segunda derivada no exista en *c*.

3.- Una de las bondades de este criterio es que permite clasificar los puntos críticos con sólo evaluar la función segunda derivada en los números críticos, a diferencia del criterio de la primera derivada que se debía evaluar la primera derivada a la izquierda y derecha del punto crítico y entre los puntos críticos vecinos.

Ejemplo 1.- Hallar todos los extremos relativos de las siguientes funciones. Si es posible, use el criterio de la segunda derivada: **a)** $f(x)=x^4-4x^3+2$; **b)** $g(x)=x^6-6x^4$; **c)** $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^4}$.

Solución:

a) $f(x)=x^4-4x^3+2$.

1) Primero obtenemos la primera derivada a fin de conseguir los valores críticos de *f*

$f'(x)=4x^3-4\cdot 3x^2$

Los puntos críticos están dados en este caso por la solución de $f'(x)=0$. Esto es

$4x^3-4\cdot 3x^2=0$

La solución se obtiene factorizando e igualando cada factor a cero.

$4x^2(x-3)=0 \quad \Leftrightarrow x=0 \quad$ ó $\quad x=3$.

Estos son los únicos puntos críticos.

2) Clasificamos los puntos críticos, para ello se intenta primero el criterio de la segunda derivada.

Calculemos entonces la segunda derivada y la evaluamos en estos puntos:

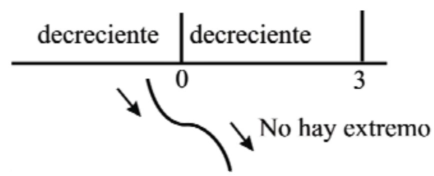
$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$.

- Para $x = 3$ tenemos que $f''(3) = 12 \cdot 3(3-2) > 0$ ($\cup$). Por lo tanto el punto $(3, f(3)) = (3,-25)$ **es un mínimo relativo.**
- Para $x = 0$ tenemos que $f''(0) = 12 \cdot 0(0-2) = 0$. **El criterio no es concluyente.** Se debe usar el criterio de la primera derivada para clasificar este número crítico. La primera derivada está dada por $f'(x) = 4x^2(x-3)$. (En general colocamos en la recta real los números críticos vecinos al valor crítico a clasificar, en este caso 3).

Usamos -1 y 1 como valores de prueba en los intervalos para los intervalos $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$ respectivamente.

$f'(-1) = 4(-1)^2((-1)-3) < 0$

$f'(1) = 4 \cdot 1^2(1-3) < 0$



Así que tanto a la derecha (pero antes que 3) como a la izquierda de 0 la primera derivada es negativa.

En conclusión: en *x*=0 no se alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo**.**

b) $g(x) = x^6 - 6x^4$

1) Primero obtenemos la primera derivada a fin de conseguir los valores críticos.

$g'(x) = 6x^5 - 6 \cdot 4x^3 = 6x^3(x^2-4)$.

Para conseguir los puntos críticos solo planteamos $f'(x) = 0$, pues es un polinomio. Esta ecuación es $6x^3(x^2-4) = 0$, la cual es equivalente a

$$6x^3 = 0 \quad \text{ó} \quad (x^2-4) = 0$$

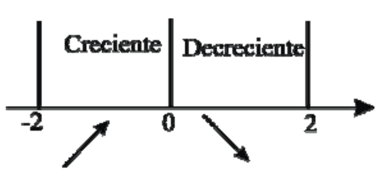
y sus soluciones $x = 0$ y $x = \pm 2$ son los únicos valores críticos.

2) Clasificamos los valores críticos, se intenta primero clasificar usando el criterio de la segunda derivada.

$g''(x) = 6 \cdot 5x^4 - 6 \cdot 12x^2$ Se reescribe de manera factorizada a fin de evaluar más rápido

$g''(x) = 6x^2(5x^2 - 12)$.

- Para $x = 2$ tenemos que $f''(2) = 6 \cdot 4(5 \cdot 4 - 12) > 0$ ($\cup$ concavidad hacia arriba). Por lo tanto en *x*=2 ocurre **un mínimo relativo.** (Este valor mínimo relativo es $f(2) = -32$).
- Para $x = -2$ tenemos que $g''(-2) = 6 \cdot 4(5 \cdot 4 - 12) > 0$ ($\cup$). Por lo tanto el punto $(-2, g(-2)) = (-2,-32)$ **es un punto mínimo relativo**
- Para $x = 0$ tenemos que $g''(0) = 6 \cdot 0 \cdot (0-2) = 0$**.** El criterio de la segunda derivada no es concluyente. Se debe usar el criterio de la primera derivada para clasificar este valor crítico. La primera derivada está dada por $g'(x) = 6x^2(x^2-4)$ colocamos en la recta real los números críticos vecinos al valor crítico a clasificar, en este caso -2 y 2.



En el intervalo $(-2,0)$ la primera derivada es positiva y en el intervalo $(0,2)$ la primera derivada es negativa. **En conclusión:** por el criterio de la primera derivada, $(0, g(0)) = (0,0)$ es un máximo relativo.

c) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^4}$

1) Primero obtenemos la primera derivada a fin de conseguir los valores críticos de *f*.

La primera derivada está dada por $f'(x)=\frac{4}{3}(x+1)^{1/3}$, está definida en todo **R**.

El valor crítico lo obtenemos entonces al plantear sólo la ecuación $f'(x)=0$, esta es

$\frac{4}{3}(x+1)^{1/3}=0$, cuya solución, $x=-1$, es el único valor crítico .

2) Se clasifica el valor crítico

Al calcular la segunda derivada

$$f''(x)=\frac{4}{9}(x+1)^{-2/3}=\frac{4}{9(x+1)^{2/3}}$$

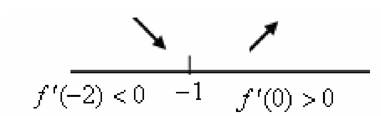
nos damos cuenta que no está definida en el valor crítico -1 (Recuerde que la división entre 0 no está definida). Así que no podemos usar el criterio de la segunda derivada.

Para clasificar este punto crítico debemos entonces usar el criterio de la primera derivada.

Al tomar valores de prueba en los intervalos de prueba podemos concluir que:

Si $x<-1$ entonces $f'(x)<0$

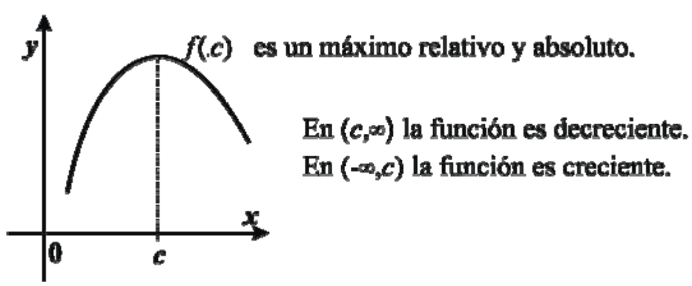
Si $x>-1$ entonces $f'(x)>0$



En conclusión: La función alcanza un mínimo relativo en *x*=-1. Este valor máximo es $f(-1)=\sqrt[3]{(-1+1)^4}=0$.

Para funciones continuas, vimos anteriormente un procedimiento de búsqueda de extremos absolutos en intervalos cerrados. Ahora damos otro criterio para algunas situaciones que se presentan.

CRITERIO DE LA DERIVADA PARA EXTREMOS ABSOLUTOS.- Si en un intervalo cualquiera **hay un solo extremo relativo entonces él** necesariamente **es absoluto** en ese intervalo**.**

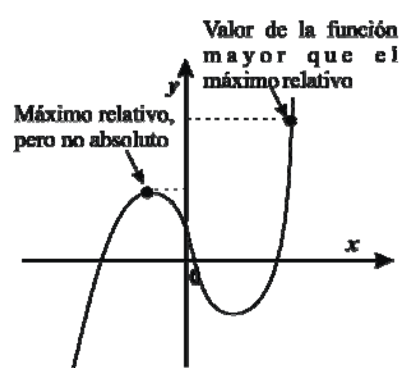


Comentarios.-

1.- En el ejemplo anterior, como la función $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^4}$ tiene un único extremo relativo en *x*=-1 entonces podemos concluir que el máximo absoluto de está función se alcanza allí.

2.- Recuerde que tiene que haber un único extremo relativo para poder hacer esta aseveración. Al lado mostramos la gráfica de una función con un único máximo relativo y sin embargo no es absoluto. La función tiene un mínimo relativo (otro extremo relativo).

3.- Todo lo dicho lo podemos aplicar para mínimos**.**



Ejemplo 2.- Determine los extremos relativos de $y=-x^4+4x$. Use primero el criterio de la segunda derivada, si no se puede entonces emplee el criterio de la primera derivada. Vea si puede usar el criterio de la derivada para concluir si hay un extremo absoluto.

Solución:

1) Primero obtenemos la primera derivada a fin de conseguir los valores críticos de *f*

$y'=-4x^3+4$ La derivada está definida en **R**.

Se determinan los valores críticos planteando solo $f'(x)=0$

$-4x^3+4=0$

La única solución de esta ecuación, *x*=1 es el único valor crítico de *f*.

2) Se clasifica el valor crítico, se intenta primero clasificar usando el criterio de la segunda derivada.

$y''=-12x^2$

$y''(1)=-12\cdot 1^2=-12<0 \quad (\cap)$

De aquí concluimos, por el criterio de la segunda derivada, que en *x*=1 se alcanza un máximo relativo. Como $(1, f(1))=(1,3)$ **es el único extremo relativo** en $(-\infty,\infty)$ y como *f* es continua **entonces él es el mínimo absoluto de la función** en toda la recta real.

Ejercicio de desarrollo.- Hallar todos los extremos relativos de la función $f(x)=x^5-10x^3+2$. Si es posible, use el criterio de la segunda derivada.

EJERCICIOS 3.4

1) Determine los extremos relativos de las siguientes funciones. Use primero el criterio de la segunda derivada, si no se puede usar emplee el criterio de la primera. Vea si puede usar el criterio de la derivada para concluir si hay un extremo absoluto.

1.1) $y=-x^5-1$**;** **1.2)** $y=x-8x^2$**;** **1.3)** $y=x^3-x^2+1$**;**

1.4) $y=x^4+x^2$**;** **1.5)** $y=x^3-3x^2+3x-2$**;** **1.6)** $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x-2$**;**

1.7) $y=(x^2+4x+20)^4$**;** **1.8)** $y=x^3+x$**;** **1.9)** $y=5x^5-4x$**;**

1.10) $y=x+\frac{1}{x}$**;** **1.11)** $y=x-x^{2/3}$**.**

Respuestas: **1.1)** Valor crítico *x*=0, no se alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo (el criterio de la segunda derivada no se puede usar); **1.2)** En *x*=1/16 hay un máximo relativo y absoluto.
1.3) En *x*=0 hay un máximo relativo. En *x*=2/3 hay un mínimo relativo. **1.4)** En *x*=0 hay un mínimo relativo y absoluto. **1.5)** Valor crítico *x*=1, por el criterio de la primera derivada no se alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo (el criterio de la segunda derivada no se puede usar); **1.6)** En *x*=3 hay un mínimo relativo. En *x*=-1 hay un máximo relativo; **1.7)** En *x*=-2 hay un mínimo relativo, absoluto también. (Es más rápido concluir por el criterio de la primera derivada). **1.8)** No hay extremos; **1.9)** En $x=-\sqrt{\frac{2}{5}}$ hay un máximo relativo. En $x=\sqrt{\frac{2}{5}}$ hay un mínimo relativo;
1.10) En *x*=-1 hay un máximo relativo. En *x*=1 hay un mínimo relativo; **1.11)** En *x*=0 hay un máximo relativo. En *x*=$\frac{8}{27}$ hay un mínimo relativo.

3.5 Optimización

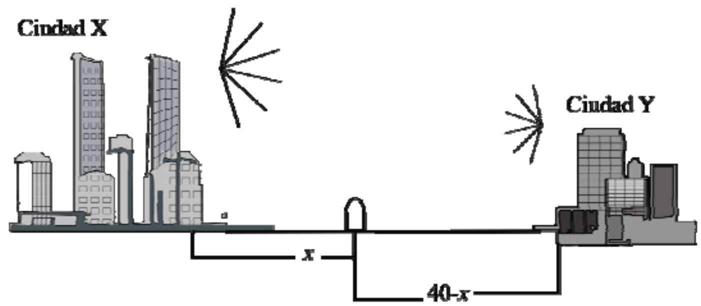
Una gran variedad de problemas requieren buscar un valor que haga mínima o máxima una cantidad. Esta cantidad puede venir dada en una fórmula, en otras ocasiones deberemos conseguir la fórmula. Veamos el siguiente problema donde está dada la fórmula.

Ejemplo 1.- Se desea instalar un observatorio entre las ciudades X y Y cuya distancia entre ellas es 40km. La ciudad X tiene 8 veces más iluminación que la ciudad Y, esto se ve reflejado en el siguiente modelo que describe *I* la luminosidad de un punto situado a *x* km. de X.

$$I(x)=\frac{8k}{x^2}+\frac{k}{(40-x)^2},$$

donde *k* es una constante positiva.

Encuentre la mejor ubicación lumínica del observatorio, esto es donde la luminosidad sea mínima.



Solución:

Aún cuando en el problema no se dice nada acerca de los valores posibles de *x*, es claro que debe estar en el intervalo (0,40).

Una vez que tenemos claro el intervalo donde se va a buscar el mínimo pasamos a derivar para luego conseguir los puntos críticos

$$I'(x)=(8kx^{-2})'+(k(40-x)^{-2})'$$

$$I'(x)=-16kx^{-3}+2k(40-x)^{-3}$$

Planteamos $I'(x)=0$ a fin de conseguir los puntos críticos

$$-16kx^{-3}+2k(40-x)^{-3}=0$$

Resolvemos observando que cada la variable sólo está en factores elevados a la -3.

$$16kx^{-3}=2k(40-x)^{-3}$$

$$8x^{-3}=(40-x)^{-3}$$

$$\sqrt[3]{8x^{-3}}=\sqrt[3]{(40-x)^{-3}}$$

$$2x^{-1}=(40-x)^{-1}$$

$$2(40-x)=x$$

$$x=\frac{80}{3}$$

$x=80/3$ es el único valor crítico dentro del intervalo. Para clasificarlo usamos el criterio de la segunda derivada. Es fácil verificar que la segunda derivada esta dada por:

$I''(x)=48kx^{-4}+6k(40-x)^{-4}$, cuando evaluamos esta derivada en $x=80/3$, obtenemos que $I''(\frac{80}{3})>0$, también se puede confirmar por ser la suma de dos cantidades positivas.

Por tanto, en este punto se alcanza la mínima luminosidad. Remarcamos que éste es el mínimo absoluto pues hay un solo extremo relativo en el intervalo cerrado.

En definitiva hay que ubicar el observatorio a $\frac{80}{3}$ km. de la ciudad X.

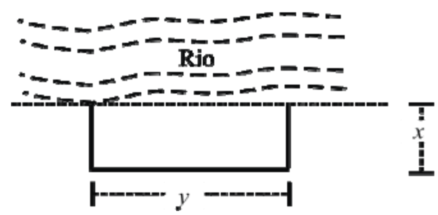
Los problemas de la vida real no se presentan tan explícitos como el problema de arriba. En los que siguen por lo menos se plantea el problema. El lector deberá entender que una de las cuestiones que quedará en él es identificar diversos problemas de optimización que diariamente puede formular, y probablemente resolver con estas técnicas.

Estos pasos deberán ser tomados en cuenta a fin de resolver problemas de máximos y mínimos

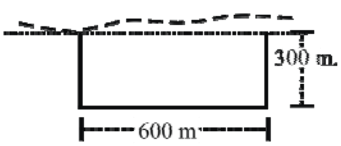
1.- Leer el problema hasta comprenderlo, este atento que cantidad se pide optimizar.
2.- Realice uno ó varios dibujos de la situación que muestre como se relacionan los elementos que varían. Escoja nombres a las variables de interés. Si hay varias variables involucradas, vea como se relacionan. Formule una ecuación que plantee las relaciones entre las variables. Esta ecuación se suele llamar de ligadura (porque establece la relación entre las variables), otros autores la llaman de restricción.
3.-Exprese la cantidad que se quiere optimizar como función de una de las variables. Si necesitó dos o más variables, despeje las demás variables en términos de una sola, usando la ecuación de ligadura (o restricción) y sustitúyala en la función a optimizar. Determine el dominio de la función resultante de acuerdo a la naturaleza del problema.
4.- Determine los máximos o mínimos de la función a optimizar por algunos de los métodos aprendidos, recuerde siempre garantizar que es absoluto.
5.- Responda con palabras cada pregunta del problema.

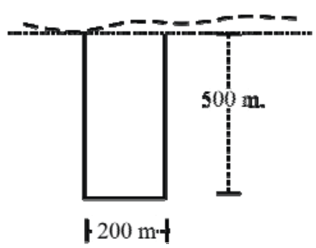
Terminología.- La función a optimizar se la conoce en la literatura como la función objetivo.

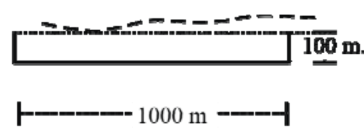
Ejemplo 2.- Se desea cercar un terreno donde uno de sus lados colinda con un río, este lado no se piensa cercar. Se dispone de 1200 metros lineales de cerca. ¿Cómo deben ser las dimensiones del terreno a fin de maximizar el área a cercar?



Solución:
Son muchas las posibilidades de cercar este terreno con 1200 metros de cerca, por ejemplo algunas de ellas son como se muestra abajo







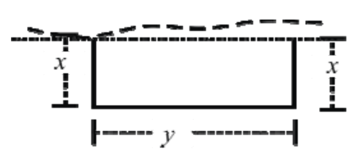
Pero se quiere conseguir la que tiene área máxima. Observe que el área está dada por

$$A = x \cdot y$$

La cantidad A **a maximizar depende de dos variables,** debemos expresarla en términos de una sola de estas variables. Para ello **se debe establecer una ecuación que de la relación entre x y y para luego despejar una de ellas y sustituirla en A.**

La relación entre x y y está dada por la restricción de la cantidad de cerca a utilizar. Esta relación viene dada por

$x + x + y = 1200$.
$2x + y = 1200$. Despejamos y



$y = 1200 - 2x$

Se sustituye y en el área, a fin de expresar A como función de x

$A(x) = x \cdot (1200 - 2x)$. Conviene observa que el Dom $A = (0,600)$

Esta función la podemos reescribir como

$A(x) = 1200x - 2x^2$

Derivamos a fin de obtener los números críticos

$A'(x) = 1200 - 4x$ Buscamos los puntos críticos

$1200 - 4x = 0$

$x = 300$

Para clasificar este número crítico calculamos la segunda derivada: $A''(x) = -4$. Al evaluarla en 300 obtenemos que $A''(300) = -4 < 0$, por tanto allí se alcanza un máximo relativo, al tener un único extremo relativo en el intervalo $(0,600)$ entonces él debe ser absoluto.

En conclusión: Las dimensiones del terreno deben ser 600 en el lado que corre paralelo al río y 300 por los otros dos lados.

Ejemplo 3.- Se estima que en un terreno si se plantan 200 matas de aguacates, la producción estimada será de 300 Kg. por árbol y que por cada árbol que se deje de plantar la producción aumentará en 3 Kg. por árbol. ¿Cuál es el número de árboles que debe plantarse en el terreno a fin de obtener la máxima cosecha posible en el terreno? ¿Cuál es este valor máximo?

Solución:

La variable que puede ser usada para modelar este problema es

x= Número de árboles que se dejan de plantar

Así que

Números de árboles a plantar$= 200 - x$ y

La producción estimada por árbol está dada por

P= *Producción por árbol* $= 300 + 3x$

De esta manera

La producción total=(número de árboles a plantar) x (*producción por árbol)*

$P(x) = (200 - x) \cdot (300 + 3x)$

Es claro que $0 \le x \le 200$. Como deseamos obtener el máximo de la producción derivamos a fin de conseguir los puntos críticos. Primero reescribimos la función:

$P(x) = 6000 + 300x - 3x^2$. Se deriva

$P'(x) = 300 - 6x$ Buscamos los valores críticos

$300 - 6x = 0$ Resolvemos la ecuación

$x = 50$.

Como estamos buscando el máximo en un intervalo cerrado y P es una función continua, evaluamos P en 50 y en los extremos del intervalo cerrado.

$P(0) = 60000$

$P(50) = 67500$

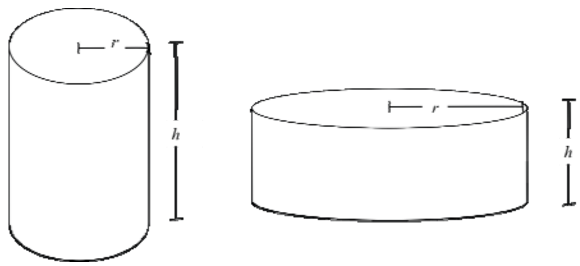
$P(200) = 0$

El máximo rendimiento es 67.500Kg. y se alcanza cuando se dejan de plantar 50 árboles. Esto es cuando se plantan $200 - 50 = 150$ árboles.

Comentario.- En este problema también se pudo establecer la conclusión del máximo absoluto usando el criterio de la derivada para funciones con un único extremo relativo.

Ejemplo 4.- Se cuenta con 1.500UM para construir un tanque de agua para riego que tendrá forma cilíndrica. Se estima que la construcción de los laterales costará 2UM el m^2 y el de fondo 1UM. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del tanque de mayor capacidad que se puede construir con estos recursos? Asuma que el tanque no tiene tapa.

Solución: Es claro que se pide el tanque con máximo volumen.



Distintos tipos de tanques pueden ser construidos con 1.500UM.

Las variables apropiadas son, sin duda, *h*, la altura, y *r* el radio del cilindro.

Recordemos que el volumen de un cilindro está dado por área de la base por la altura. En fórmulas esto es

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Como se puede observar la función que se quiere maximizar depende de dos variables. Entonces debemos buscar una relación entre *r* y *h* dada por una ecuación.

La relación entre las variables estará dada por la restricción que se debe gastar 15.000UM. Formulamos verbalmente la ecuación de restricción:

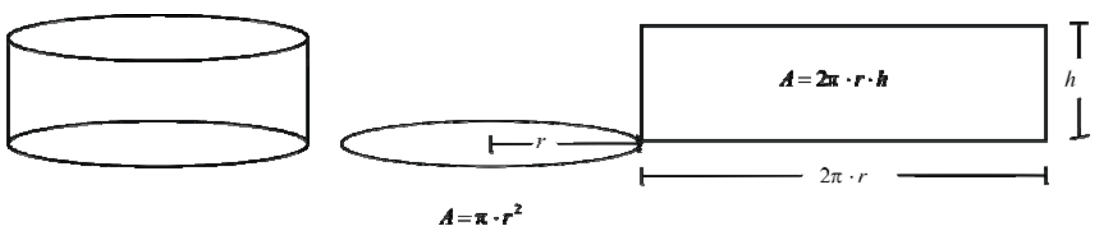
Ecuación de restricción: Costo total del tanque=15.000.

Vamos a expresar el costo total en términos de las variables:

Costo total=costo de la base+costo de los laterales

donde

Costo de la base= 1xArea de la base y Costo de los laterales= 2xArea de los laterales



Costo de la base= $\pi \cdot r^2$ y Costo de los laterales= $2 \cdot (2\pi \cdot r \cdot h)$

De esta manera

Costo total= $\pi \cdot r^2 + 4\pi \cdot rh$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de restricción obtenemos

$$\pi \cdot r^2 + 4\pi \cdot rh = 1.500$$

Ésta es la ecuación de restricción o de ligadura. De ella despejamos una de las variables para sustituirla en la función a maximizar. Resulta aquí conveniente despejar *h*.

$$h = \frac{1.500 - \pi \cdot r^2}{4 \cdot \pi \cdot r}$$

$$h = \frac{375}{\pi \cdot r} - \frac{r}{4}.$$

Al sustituirla en la función a maximizar queda

$$V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot (\frac{375}{\pi \cdot r} - \frac{r}{4})$$

$$V(r) = 375r - \frac{\pi \cdot r^3}{4}.$$

Ahora V quedó expresada como función de r. Es claro que el dominio analítico de esta función es **R.** Sin embargo el dominio dado por la naturaleza del problema es $(0, \infty)$ y es aquí donde buscaremos el máximo absoluto.

Determinemos los puntos críticos de *V*:

$$V' = 375 - \frac{3\pi \cdot r^2}{4}$$

$$375 - \frac{3\pi \cdot r^2}{4} = 0$$

$$r = \sqrt{\frac{1500}{3\pi}} \approx 12.61m.$$

Tenemos que clasificar este valor crítico, se usará el criterio de la segunda derivada.

Es fácil de chequear que $V''(r) = -6\pi \cdot r$, al evaluar en el valor crítico da $V''(\sqrt{\frac{1500}{3\pi}}) < 0, (\cap)$, por tanto por el criterio de la segunda derivada en este valor se alcanza un máximo relativo y como hay un único extremo relativo en el intervalo $(0, \infty)$, aquí se alcanza el absoluto. Sustituyendo $r \approx 12.61m.$ en $h = \frac{375}{\pi \cdot r} - \frac{r}{4}$, obtenemos que $h \approx 6.31m$.

En conclusión: El tanque debe tener una altura $h \approx 6.31m$ y el radio debe ser $r \approx 12.61m.$

EJERCICIOS 3.5

1) El porcentaje de sobrevivencia de un cierto tipo de larvas a una temperatura constante T(grados Celsius) al cabo de una semana es modelado por la fórmula $P(T)=-1.42T^2+68T-746$ para $20 \leq T \leq 30$. Halle las temperaturas a las cuales sobrevive el mayor y el menor porcentaje de larvas. **Respuesta:** en 23.94ºC sobrevive el mayor porcentaje y en 30º el menor.

2) La velocidad de la sangre que está a *r* centímetros del eje central de una arteria de radio *R* es $S(r) = c(R^2 - r^2)$, donde *c* es una constante positiva. ¿Dónde es mayor la velocidad de la sangre?

Respuesta: En el eje central de la arteria.

3) La reacción del cuerpo a los medicamentos con frecuencia está dada por una ecuación de la forma $R(d) = d^2(\frac{c}{2} - \frac{d}{3})$ donde *d* es la dosis y *c* es la dosis máxima que puede administrarse. La razón de cambio de $R(d)$ respecto a d se denomina sensibilidad. Halle el valor de *d* para el cuál la sensibilidad es máxima. **Respuesta:** En *c*, la dosis máxima.

4) De acuerdo con cierto modelo logístico, la población mundial t años después de 1960 será aproximadamente $P(t)=\dfrac{40}{1+12e^{-006t}}$. ¿Cuándo crecerá más rápidamente la población?

Respuesta: $\dfrac{\ln 12}{0.06}$ años después de 1960.

5) Un fabricante está diseñando una caja de base cuadrada sin tapa, que debe tener un volumen de 120 cm^3. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que requiera un mínimo de material?

Respuesta : $2\sqrt[3]{30}cm \;\; x \;\; 2\sqrt[3]{30}cm \;\; x \;\; \sqrt[3]{30}cm$.

6) Un fabricante está diseñando una caja de base cuadrada de 120 cm^3. de capacidad ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que la suma de las longitudes sea mínima?

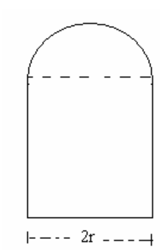
Respuesta: $2\sqrt[3]{15}cm \;\; x \;\; 2\sqrt[3]{15}cm \;\; x \;\; 2\sqrt[3]{15}cm$.

7) Se está diseñando un embalse de base cuadrada con capacidad para 120.000 m^3. El costo del material de la base cuadrada es 2UM el m^2 y el material lateral tiene un costo de 1UM el m^2 ¿Cuáles son las dimensiones del embalse con mínimo costo?

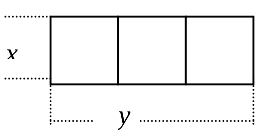
Respuesta: Cada lado de la base debe medir 200metros y la altura 50metros

8) El material de fondo de una cava de base cuadrada cuesta el triple por metro cuadrado de lo que cuesta el material de las caras y la tapa. Encuentre las dimensiones de la cava con máxima capacidad que se puede construir si la cantidad total de dinero disponible para el material es de 12UM y el metro cuadrado de material para el fondo cuesta 0.60 UM.

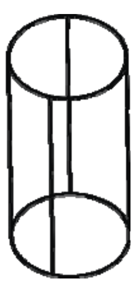
Respuesta: Cada lado de la base debe medir $\sqrt{5}m.$ y la altura $2\sqrt{5}m.$



9) Una ventana termina en una semicircunferencia como muestra el dibujo. Hallar las dimensiones de la ventana que tenga área máxima si sólo se dispone de 16 mts. lineales de hierro para formar el marco. **Respuesta.** Base y diámetro de la semicircunferencia: $\dfrac{16}{4+\pi}$ base, la altura del rectángulo es $\dfrac{16}{4+\pi}$.



10) Se quiere cercar 1000m^2 divididos en tres lotes iguales, como muestra el dibujo. Si el metro de cerca interior cuesta 2UM el metro lineal y el metro de la exterior cuesta 3UM el metro. ¿Cuáles son las dimensiones de los lotes que produce la cerca más económica? **Respuesta** $x=10\sqrt{6}m.$ $y=\dfrac{100\sqrt{6}}{6}m.$



11) Una lata cilíndrica sin tapa debe tener un volumen K. Demuestre que si se usa la cantidad mínima de material, entonces el radio y la altura serán iguales a $(K/\pi)^{1/3}$.

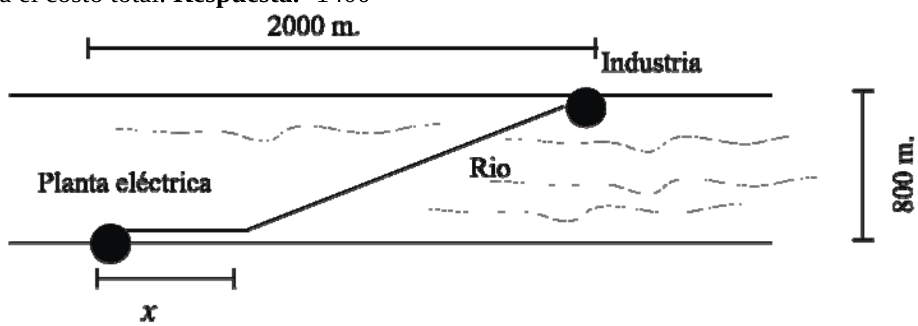
Ayuda: Volumen del cilindro $=\pi r^2 h$; Área de la superficie$=2\pi r h+\pi r^2$.

12) Se requiere fabricar una lata cilíndrica disponiendo para ello de K cm^2 de material. Demuestre que el radio y la altura de la lata con volumen máximo son iguales a $\sqrt{K}/(3\pi)$.

(Ayuda: Volumen del cilindro $=\pi r^2 h$; Área de la superficie con fondo y sin tapa $=2\pi r h+\pi r^2$)

13) En una hectárea se estima que con una siembra de 50 matas de aguacates la producción al cabo de unos años será de 300 Kg. por árbol y por cada árbol adicional que se siembre la producción bajará en un estimado de 3 Kg. por árbol. ¿Cuántos árboles deberá plantar el agricultor para maximizar la producción? **Respuesta** 75 árboles

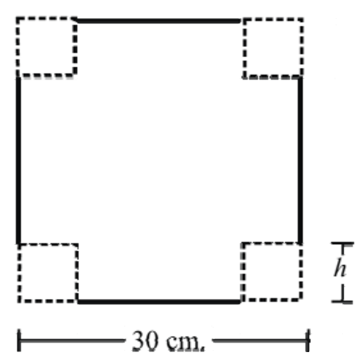
14) Se va a tender un cable desde una planta eléctrica ubicada a un lado de un río de 800metros de ancho hasta una industria que se encuentra al otro lado, 2000 metros río arriba de la planta. El costo de tender el cable por debajo del agua es 5000UM por kilómetro y sobre tierra es de 3000UM por kilómetro. El cable seguirá la orilla del río a partir de la planta una distancia de x kilómetros y luego cruzará diagonalmente el río en línea recta directamente hasta la industria. Determine el valor de x que minimiza el costo total. **Respuesta.-** 1400



15) Repita el ejercicio anterior cuando el precio sobre tierra es 4.800UM. **Respuesta.-** x=0. Se tiende sólo el cable subterráneo directamente de la planta a la industria.

16) Un envase cilíndrico debe contener 200cc de jugo. El costo de un cm^2 de material de las bases, es decir la parte superior e inferior del envase, es el doble que la de los laterales. ¿Cuáles son las dimensiones del envase menos costoso? **Respuesta** $r = \sqrt[3]{\frac{100}{2\pi}}$

16) Se quiere construir una caja abierta utilizando una pieza cuadrada de cartón de 30cm. de lado, cortando un cuadro en cada una de las 4 esquinas y doblando hacia arriba los lados. **a)** ¿Cómo debemos cortar para obtener la caja máximo volumen? **b)** ¿Cuál es ese volumen? **Respuesta: a)** Hay que cortar cuadro de 5cm de lado; **b)** 2000 cm^3.



17) Se está diseñando una lata cilíndrica con tapa y fondo la cual debe tener una capacidad de 64cc.

¿Cuáles son las dimensiones de la lata que utiliza la mínima cantidad de material?

(Respuesta r = 2.16 cm. y h = 4.36 cm. $r = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$; $h = \frac{64}{\pi \cdot r^2}$.

18) La alcaldía de un municipio exige que el retiro de frente sea de al menos 7 metros, 5 metros al menos de fondo y de cada lado exista un retiro de al menos 4 metros. Entre todos los terrenos de forma rectangular con 600 metros cuadrados de área ¿cuáles son las dimensiones del terreno que tiene mayor área para construir? **Respuesta:** Fondo 30metros y frente 20metros.

19) Un agricultor puede vender el saco de apio a 30UM el primero de septiembre, el precio del apio empieza a disminuir a una tasa aproximada de 0.5 UM por semana. Para la fecha del 1 de septiembre él tiene 120 sacos y estima que su cosecha aumentará en tres sacos por semana. ¿Cuándo le convendrá vender su cosecha? **Respuesta:** dentro de 10 semanas.

MÁS PROBLEMAS

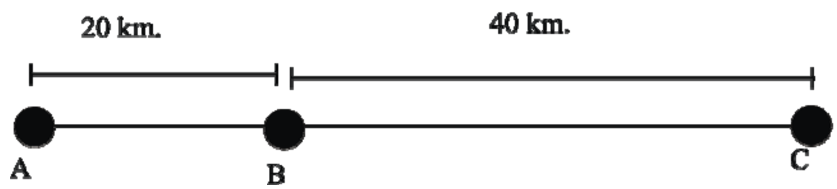
1) La concentración de agua en el suelo ha sido modelada para cierta región mediante la fórmula $c = 1 - e^{-x^2}$. Determine la profundidad donde c crece más rápido. **Respuesta**: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) El tamaño N de una cosecha depende del nivel de nitrógeno de acuerdo al siguiente modelo $T(N) = \frac{2N}{4+N^2}$. Calcule el nivel de nitrógeno en que se maximiza la producción. **Respuesta**: N=1.

3) Un modelo para la velocidad de crecimiento de una población está dada por el siguiente $v(N) = N\left(1 - \left(\frac{N}{100}\right)^{3/2}\right)$, donde N es el tamaño de la población. Calcule el tamaño de la población donde la velocidad de crecimiento es máxima.

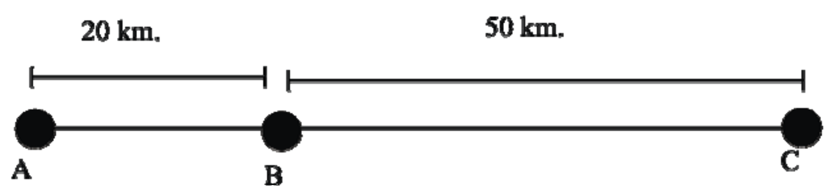
4) Un agricultor estima que si planta 120 árboles de aguacates en un terreno, la producción esperada al cabo de unos años por árbol será 475 Kg. y esta disminuirá en 5 Kg. por árbol, por cada árbol adicional plantado en el terreno. ¿Cuántos árboles debería plantar el cultivador para maximizar la producción total? **Respuesta:** 154 árboles

5) Se piensa establecer una fábrica de refresco para abastecer a tres ciudades ubicadas a los largo de una carretera recta. Las ubicaciones de las tres ciudades están representadas en el diagrama:



¿Dónde se deberá establecer la fábrica a fin de que la suma de los cuadrados de las distancias de las ciudades a la fábrica sea mínima? (**Ayuda:** Asuma que el punto óptimo está entre B y C). **Respuesta:** En la ciudad B.

6) Resuelva el problema anterior con las siguientes distancias entre ciudades



Respuesta: A 10 Km. de distancia de B en la vía a C

3.6 Optimización en economía

Hay una gran variedad de problemas en administración y economía donde se emplea la derivada para encontrar máximos y mínimos. Particularmente a una empresa le interesa el nivel de producción donde se alcanza la máxima utilidad o el máximo ingreso o a un fabricante le interesaría saber el nivel de producción es que su costo promedio por unidad es mínimo. Además de estos problemas en esta sección estudiaremos en detalle el problema de control de inventario. Empezaremos esta sección con problemas sobre costos.

Ejemplo 1.- El costo total de producir q unidades de un artículo está dado por $c(q)=5000+4q+\frac{1}{2}q^2$. **a)** ¿Cuántas unidades deberá producirse a fin de obtener el mínimo costo promedio por unidad? **b)** ¿Cuál es ese mínimo costo promedio?

Solución: Primero debemos obtener el costo promedio. Este se calcula dividiendo el costo total entre q

$$\bar{c}(q)=\frac{5000+4q+\frac{1}{2}q^2}{q}=\frac{5000}{q}+4+\frac{1}{2}q.$$

Ahora se calcula la primera deriva de $\bar{c}$.

$$\bar{c}'(q)=\left(5000q^{-1}+4+\frac{1}{2}q\right)'=-5000\cdot q^{-2}+\frac{1}{2}.$$

Planteamos $\bar{c}'(q)=0$ para encontrar los valores críticos.

$$-5000\cdot q^{-2}+\frac{1}{2}=0$$

Esta ecuación la resolvemos despejando q^2.

$$q^2=10.000$$

$$q=\pm 100.$$

Alternativamente pudimos resolver la ecuación reescribiendo el lado izquierdo como una suma de fracciones, la cual sumamos y planteamos la ecuación numerador igual a cero.

Eliminamos la solución negativa pues carece de sentido.

Tenemos que clasificar $q=100$ que es el único valor crítico en el intervalo $[0,\infty)$. Usaremos el criterio de la segunda derivada

$\bar{c}''(q)=10000\cdot q^{-3}$, al evaluar tenemos

$$\bar{c}''(100)=10000\cdot\frac{1}{100^3}>0.$$

Entonces en $q=100$ se alcanza un mínimo relativo y como hay un único extremo relativo entonces podemos concluir:

a) Cuando se producen 100 unidades tendremos el costo promedio mínimo.

b) El mínimo costo promedio es

$$\bar{c}(100)=\frac{c(100)}{100}=\frac{5000+4\cdot 100+(100)^2/2}{100}=\frac{5000+400+5000}{100}=104 \text{ UM.}$$

Ejemplo 2.- El costo total de producir q unidades de un artículo está dado por $c(q)=1000+300q+\frac{1}{20}q^2$. Si la ecuación de demanda está dada por $p=200-0.1q$. **a)** ¿Cuántas unidades deberá producirse a fin de obtener la máxima utilidad? **b)** ¿Cuál es el precio en que se tiene la máxima utilidad? **c)** ¿Cuál es la utilidad máxima posible? **d)** Si el gobierno impone un impuesto de 10UM por unidad ¿Cuál es el nuevo nivel de producción que maximiza la utilidad?

Solución: Primero se debe conseguir la función utilidad $U = I - C$

En este caso, como $I = pq = (400-0.1q)q = 400q - 0.1q^2$, tenemos

$$U(q) = (400q - 0.1q^2) - (1000 + 300q + \frac{1}{20}q^2)$$

$$U(q) = 400q - 0.1q^2 - 1000 - 300q - \frac{1}{20}q^2$$

$$U(q) = -\frac{3}{20}q^2 + 100q - 1000$$

a) Derivamos

$$U'(q) = -\frac{6}{20}q + 100$$

Se plantea $U' = 0$ para conseguir los puntos críticos:

$$-\frac{3}{10}q + 100 = 0$$

$$q = 1000/3$$

Se tiene un único punto crítico. Se usa el criterio de la segunda derivada para clasificar el posible extremo.

$$U''(q) = -\frac{3}{10}$$

Como U'' es siempre negativa, así lo es en el número crítico. Por tanto en $q = 1000/3$ se alcanza un máximo relativo y por existir un único extremo, éste es absoluto.

b) Se sustituye en la ecuación de demanda para obtener el precio de venta máximo.

$$p = 400 - 0.1(1000/3)$$

$$p = 1100/3 \approx 367 \text{ UM.}$$

c) Se consigue el valor máximo de la función utilidad.

$$U(q) = -\frac{3}{20}q^2 + 100q - 1000$$

$$U\left(\frac{1000}{3}\right) = -\frac{3}{20}\left(\frac{1000}{3}\right)^2 + 100\left(\frac{1000}{3}\right) - 100 == 49.700/3UM \approx 16.567UM .$$

d) Al imponer un impuesto de 10 UM por unidad los costos totales aumentan en $10q$. La nueva función de costos está dada por

$$c_i(q) = 1000 + 310q + \frac{1}{20}q^2$$

y la función de utilidad queda

$$U_i(q) = -\frac{3}{20}q^2 + 90q - 1000$$

Derivamos

$$U_i'(q) = -\frac{6}{20}q + 90$$

Se plantea $U_i' = 0$ para conseguir los puntos críticos:

$$-\frac{3}{10}q + 90 = 0$$

$$q = 300 .$$

De nuevo, se tiene un único punto crítico y $U_i''(q) = -0.1$, se concluye de manera similar que arriba: En $q = 900$ se alcanza un máximo de la función utilidad con impuesto. Para obtener el precio en que se alcanza la máxima utilidad se sustituye en

$$p = 400 - 0.1(300)$$
$$p = 370$$

y para la utilidad máxima se sustituye en la función utilidad con impuesto

$$U_i(q) = -\frac{3}{20}q^2 + 90q - 100$$
$$U_i(300) = -\frac{3}{20}(300)^2 + 90(300) - 100 = 13.400UM$$

Ahora la utilidad máxima es de 13.400UM. Observe que el nuevo precio es de 370 UM.

Ejemplo 3.- Un gimnasio tiene la cuota mensual en 100UM. A ese precio se inscriben mensualmente un promedio de 550 clientes. Se quiere subir los precios y se estima que por cada aumento de 2UM se pierden 5 clientes ¿Qué precio se deberá fijar a fin de que el gimnasio obtenga el máximo ingreso?
Solución:
En este caso el ingreso viene dado por

Ingreso= (Número de clientes)x(cuota mensual)

Definimos como

$x =$ Número de aumentos de 2 UM.

Es claro que *x* tiene que ser mayor o igual a cero. Con esta definición tenemos:

Cuota mensual= $100 + 2x$
Número de clientes= $550 - 5x$

Note que el número de clientes dado por esta fórmula es una cantidad no negativa si $x \leq 110$

Sustituyendo en la función ingreso obtenemos

$$I(x) = (550 - 5x)(100 + 2x)$$
$$I(x) = 55000 - 500x + 1100x - 10x^2$$
$$I(x) = 10(5500 + 60x - x^2)\text{, donde } x \in [0,110]$$

Ésta es la función a maximizar. A fin de determinar donde se alcanza el máximo se deriva la función ingreso y se iguala a 0

$$I' = 10(60 - 2x) = 0$$

La solución de esta ecuación, $x = 30$, es el único valor crítico de la función ingreso.
Una manera de determinar el máximo absoluto en $[0,110]$ es evaluar la función de ingreso en el valor crítico y en los extremos del intervalo:

$$I(0) = 55000$$
$$I(30) = 64000$$
$$I(110) = 0$$

Entonces el máximo del ingreso ocurre en $x = 30$ y es de 64000UM. Recuerde que *x* es el número de incrementos de 2UM y la cuota mensual donde se alcanza el máximo ingreso está dada por

Cuota mensual= $100 + 2(30) = 160$

Con esta cuota se tendrá que

Número de clientes= $550 - 5(30) = 400$.

Comentario.- El problema también se podía resolver estableciendo como variables *p* y *q*. Si se procede de esta manera entonces hay que establecer una ecuación que relacione estas variables. Observe que la relación entre p y q es lineal.

CONTROL DE INVENTARIOS

Una aplicación importante de la teoría de optimización dada en la administración y economía es el problema de control de inventarios. En términos de negocios este problema lo podemos plantear de la siguiente manera: Se tiene una demanda fija de k unidades de un producto al año, la cual es vendida de una manera uniforme a lo largo del año. El negocio enfrenta dos costos: los costos de almacenamientos y los costos de envío. Si el tamaño del pedido es grande el costo de almacenamiento así lo será, pero se incurrirá en menos costos de envío. Por otra parte, si el tamaño del pedido es pequeño se tendrán que hacer muchos pedidos al año incurriendo en costos de envío elevados. En la producción de una industria se tienen problemas con planteamientos similares: una fábrica que necesita alguna materia prima, donde están presentes estos dos costos. También una industria que produce los productos en apenas unas horas, pero que el costo de almacenamiento es elevado y presenta por otro lado un costo en cada proceso de producción.

Ejemplo 3.- Una tipografía utiliza 6.000 resmas de pliego de papel al año. El costo de envío de pedido es de 30UM. independientemente de la cantidad de resmas pedidas. La resma se compra a 10,5UM la unidad. Suponga que cada pedido llega justo cuando se ha acabado el inventario del anterior pedido. El costo de almacenamiento es de 1UM por resma al año y las resmas son utilizadas de manera uniforme a lo largo del año. Determinar el tamaño del lote que minimiza el costo total.

Solución: Sea x =número de resmas de papel en cada pedido.

En este problema de control de inventarios se han hecho las suposiciones:

1) La utilización de resmas por parte de la tipografía se hace de manera uniforme.
2) Justo cuando se acaba el pedido anterior llega el siguiente.

Estas dos suposiciones llevan a intuir que en el almacén existe en promedio $x/2$ resmas de papel al año. Por ejemplo si se hacen 2 pedidos al año. Cada pedido es de 3.000 resmas. El día que llega un pedido hay 3.000 resmas de papel, justo llegan cuando se acaban las anteriores y el último día hay 0 resmas. En promedio hay 1.500 resmas en el almacén en cada periodo y durante el año. Esta cuenta intuitiva puede ser demostrada de manera formal usando la teoría de integración.

Tenemos entonces que:

$$\begin{matrix}\textbf{Costo de}\\ \textbf{almacenamiento}\end{matrix} = \begin{pmatrix}\textbf{Costo de}\\ \textbf{almacenamiento}\\ \textbf{por resma}\end{pmatrix} \mathbf{x} \begin{pmatrix}\textbf{Número medio}\\ \textbf{de resmas}\\ \textbf{almacenados}\end{pmatrix}$$

$$= 1\cdot\frac{x}{2}$$

Si el tamaño del pedido es x entonces el número de pedidos es $\frac{6.000}{x}$. Podemos entonces obtener

$$\begin{matrix}\textbf{Costo total}\\ \textbf{por envíos}\end{matrix} = \begin{pmatrix}\textbf{Número de}\\ \textbf{pedidos}\end{pmatrix} \mathbf{x} \begin{pmatrix}\textbf{Costo de}\\ \textbf{un envío}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{6.000}{x}\cdot 30$$

Finalmente

$$\textbf{Costo total} = \begin{pmatrix}\textbf{Costo de}\\ \textbf{almacenamiento}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\textbf{Costo total}\\ \textbf{por envíos}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\textbf{Costo total por}\\ \textbf{compra de 6.000}\\ \textbf{resmas}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{180.000}{x}+6.000x10.5$$

Si denotamos por $C(x)$ el costo total cuando los pedidos son de x resmas entonces tenemos:

$$C(x)=\frac{x}{2}+\frac{180.000}{x}+63.000\,.$$

Debemos entonces encontrar el mínimo absoluto de $C(x)$ en $(0,6000]$

Buscamos primero los puntos críticos dentro del intervalo, para ello derivamos y planteamos donde la derivada se anula:

$$\frac{1}{2}-\frac{180.000}{x^2}=0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x=\pm 600$. Sólo tomamos la solución positiva. Para clasificar usamos el criterio de la segunda derivada

$$C''(x)=\frac{360.000}{x^3}$$

$$C''(600)=\frac{360.000}{600^3}>0\,.$$

Así en x=600 se alcanza un mínimo relativo y por existir un único extremo en el intervalo este mínimo es absoluto. En conclusión se deben pedir lotes de 600 resmas.

EJERCICIOS 3.6

1) La ecuación de demanda de un producto es $p=12-0.01q^2$. ¿Cuál es el precio en que se obtiene el máximo ingreso? **Respuesta:** p=8 UM.

2) La función de demanda para un determinado artículo es $p=20e^{-q/10}$. **a)** Encuentre el valor de p en que el ingreso es máximo para $0\le q\le 20$. **b)** Encuentre el valor de p en que el ingreso es máximo para $0\le q\le 5$. **Respuesta:** **a)** p=20/e; **b)** p=20/√e UM.

3) La ecuación de demanda de un determinado artículo es $p=200-2q$ y la función de costo es $c=200+4q$. ¿En qué nivel de producción se maximizará la utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima? **Respuesta :** q=49 unidades; U_{max}=4602 UM.

4) La ecuación de demanda de un determinado artículo es $p=\frac{150}{\sqrt{q}}$ y la función de costo total es $c=200+25q$. ¿Cuál es el precio que dará la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima? **Respuesta**: p=50UM; q=9; 25 UM es la utilidad máxima).

5) El costo unitario de un producto es 3 UM y la ecuación de demanda es $p=200-3q$. ¿Cuál es el precio que dará la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima? Demuestre que el máximo ocurre cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal. **Respuesta:** p=101,5 UM.; U_{max}=3234 UM.

6) La ecuación de demanda de un determinado artículo es $p=\frac{8000}{\sqrt{q}}$ y la función de costo promedio es $\bar{c}=50+\frac{100}{q}$. **a)** ¿Cuál es el precio y el nivel de producción que dará la utilidad máxima? **b)** Demuestre que en este nivel el ingreso marginal es igual al costo marginal. **Respuesta:** q=64.000

7) Se ha determinado que la función de costo promedio para un determinado artículo es $\bar{c}=q+32+\frac{400}{q}$. **a)** ¿Cuál es el nivel de producción que minimiza el costo promedio si la empresa no puede fabricar más de 30 artículos? **b)** ¿Cuál es el nivel de producción que minimiza el costo promedio por unidad si la empresa no puede fabricar más de 15 artículos?
Respuesta: **a)** q=20; **b)** q=15 unidades

****8)** La función de costos totales de un fabricante es $c=0.04q^2-4q+100$. **a)** ¿Cuál es el nivel de producción para el cuál el costo promedio es mínimo? **b)** ¿Cuál es el nivel de producción para el cuál el costo marginal es mínimo? **Respuesta:** **a)** q=50; **b)** q=0.

9) Los costos totales fijos de una empresa son 1000**UM**, el costo variable por unidad es de 5**UM** y la ecuación de demanda es $p=\frac{40}{\sqrt{q}}$. **a)** ¿Cuál es el nivel de producción que maximiza la utilidad? ¿Cuál es el precio que hay que fijar para que la utilidad sea máxima? **b)** Si el gobierno fija un impuesto de 3**UM** por unidad, ¿cuál será ahora el precio que maximiza la utilidad? Compare precios óptimos, producción y utilidad con y sin impuesto. **Respuestas: a)** q=16; p=10**; b)** q=25/4 unidades; p=16 UM.
***10)** Un editor sabe que tiene una venta de 5.000 ejemplares de un libro si lo vende a 25UM. El estima que por cada UM que aumente deja de vender 25 ejemplares. Si la función de costos totales por editar q libros es $c(q)=-0.001q^2+2q+20.000$. ¿Cuál es el precio que maximizará la utilidad?
Respuesta: 110.64 UM
11) Un hotel de 100 habitaciones dobles cobra 80UM por noche, con este precio normalmente se alquila 40 habitaciones. La gerencia estima que por cada 5 UM de rebaja conseguirá alquilar 4 habitaciones más. ¿Cuál es el precio que maximizará el ingreso? **Respuesta:** p=65 UM.
12) Si la función de utilidad de un producto está dada por $u=-\frac{1}{3}q^3+2.5q^2+500q-5000$
Determine el nivel de producción en que la utilidad es máxima considerando. **a)** Que la empresa no puede producir más de 50 artículos. **b)** Que la empresa no puede producir más de 20 artículos. **Respuesta: a)** q=25 UM, **b)** q=20 unidades.
13) Si una compañía gasta x UM en publicidad, el número de artículos que venderá está dado por $q=400\frac{x}{1+x}$. Sin incurrir en los gastos de publicidad, la compañía tiene unos beneficios de 100UM por artículo. Determine el valor de q y el gasto en publicidad que maximiza la utilidad.
Respuesta: 199 UM.
14) Una concesionaria de carros vende 5000 vehículos al año y los pide a la fábrica en lotes de tamaño q. Cada pedido cuesta 250 UM y el costo de almacenaje cuesta 50 UM. por auto, independientemente del tiempo en que estará en el almacén. Determine el tamaño óptimo del lote, (esto es, el que minimiza la suma de los costos de almacenamiento y pedido).
15) El costo de producir un artículo es 150+t UM, donde t es el impuesto por unidad producida. La ecuación de demanda del artículo esta dada por p=300-3q. **a)** Diga en términos de t, el nivel de producción que maximiza las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la máxima utilidad? **b)** Si t=30, ¿cuál es el nivel de producción que maximiza la utilidad y cuál es esas utilidad?. Repita con t=60.
c) Determine el impuesto por unidad t que debe imponerse para obtener una máxima recaudación.
Respuestas: $\frac{150-t}{6}$; **b)** 20; 15 unidades; **c)** 75 UM.
16) El ingreso total por producir q artículos está dado por $I(q)=4375q-25q^2$ y su función de costo es $C(q)=100+55q-q^2$. **a)** ¿Cuál es el nivel de producción en que se produce la máxima utilidad si la fabrica tiene una capacidad para elaborar 100 artículos? **b)** ¿Cuál es el nivel de producción en que se produce la máxima utilidad si la fabrica tiene una capacidad hasta elaborar 80 artículos?
Respuestas: a) 90; **b)** 80 unidades.
17) La ecuación de demanda para q unidades de un producto está dada por $p=\frac{40}{\sqrt{q}}$ y el costo promedio es $\overline{C}(q)=\frac{100}{q}+5$. **a)** ¿Cuál es el nivel de producción que maximiza la utilidad? ¿Cuál es el precio que hay que fijar para que la utilidad sea máxima? **b)** El gobierno decide dar un subsidio de 1UM por unidad, ¿cuál será ahora el precio que maximiza la utilidad? Compare precios óptimos, producción y utilidad con y sin subsidio. **d)** ¿Cuánto le cuesta al estado este subsidio?
Respuestas: a) q=16 p=10 U=80**; b)** q=25; p=8; U=25; **d)** 25UM.
18) Un museo cobra la admisión a grupos de acuerdo a la siguiente política. Para los grupos con 40 o menos personas el precio es de 50UM por persona, pero por cada persona adicional el precio por persona disminuirá en 1UM (por ejemplo si el grupo es de 42 personas el precio para cada una es de

48UM). **a)** Exprese el ingreso del museo en función del tamaño del grupo. **b)** ¿Cuál es el tamaño del grupo para el cuál el museo obtiene el máximo ingreso? **Respuesta: b)** 45 personas.

19) Un museo cobra la admisión a grupos de acuerdo a la siguiente política. Para los grupos con 40 o menos personas el precio es de 50UM por persona, y el ticket de las personas por encima de 40 disminuirán en 1 UM por cada persona por encima de 40. (Es decir si el tamaño del grupo es 42 entonces las primeras 40 tickets costarán 50 y los tickets 41 y 42 costarán 48) **a)** ¿Cuál es el tamaño del grupo para el cual el museo obtiene el máximo ingreso? **b)** ¿Cuál es ese ingreso?

Respuestas: 25 personas, I=2625UM..

20) Una ferretería tiene una demanda promedio de 400 cajas de bombillos tubulares tipo X al año. El costo de envío desde la fábrica es de 50UM independientemente de la cantidad de cajas pedidas hasta un máximo de 400 cajas. El costo de adquisición de cada caja es de 100UM y el costo de almacenamiento es de 8UM por caja por año. Suponga que las cajas son vendidas de manera constante durante el año y cada pedido llega justo cuando se acabo el anterior, determine el tamaño del lote que minimiza los costos totales. **Respuesta:** 80 cajas.

3.7 Gráficas de funciones polinómicas

Las funciones polinómicas son las más sencillas de graficar pues son pocos los elementos a tomar en cuenta. El dominio de la función son todos los reales, podemos tomar en cuenta la simetría, ella es fácil de determinarla (si todos los exponentes son pares la función es par, si todos los exponentes son impares la función es impar, si no ocurre ninguna de las situaciones anteriores entonces la función no es par ni impar).

Para graficar este tipo de función se suele realizar los siguientes pasos:

1.- Calcular puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

2.- Determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

3.-Calcular algunos puntos de la gráfica de interés. Suelen ser los puntos críticos, puntos de inflexión, intersección con el eje *y* e intersecciones con el eje *x* si resulta fácil de calcular. Graficar estos puntos y luego unirlos de acuerdo a la información aportada por **1** y **2.**

Se recomienda que la información aportada por los numerales **1** y **2** colocarlos en la recta real que esté alineada con el eje *x* del plano sobre el que vamos hacer la grafica.

Ejemplo 1.- Bosqueje la gráfica de $y=\frac{-x^3}{4}+3x$.

Solución:

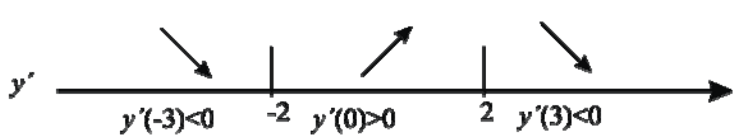
1.- Se determina puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. Para ello calculamos la primera derivada:

$$y'=-\frac{3x^2}{4}+3$$

Determinamos los puntos críticos al solucionar:

$$-\frac{3x^2}{4}+3=0$$

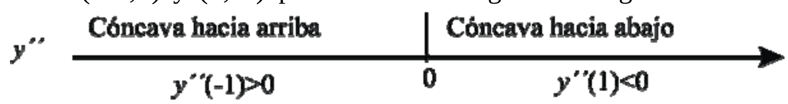
$x=\pm 2$ son los puntos críticos de *y*. Los colocamos en la recta real y evaluamos la primera derivada en valores de prueba tomados de los intervalos delimitados por estos puntos críticos a fin de estudiar la monotonía de la función.



La información de los intervalos de crecimiento y decrecimiento es colocada en la recta real alineada con el eje x del plano donde se trazará la gráfica de la función

2.- Se determina intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

La segunda derivada está dada por $y''=-\frac{3x}{2}$. El único punto candidato a cambio de concavidad es x=0. Lo colocamos en la recta real y evaluamos la segunda derivada en valores de prueba tomados en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$ para examinar el signo de la segunda derivada en estos intervalos.



3.- Calculamos las intersecciones con los ejes coordenados y hacemos una tabla de valores donde están los puntos críticos y los puntos de inflexión junto con las intersecciones con los ejes.

Recuerde que para encontrar intersección con el eje x planteamos $y=0$. Esto es

$$y=\frac{-x^3}{4}+3x=0,$$

cuyas soluciones son $x=0,\pm\sqrt{12}$. Así los cortes son $(0,0)$, $(\sqrt{12},0)$ y $(-\sqrt{12},0)$

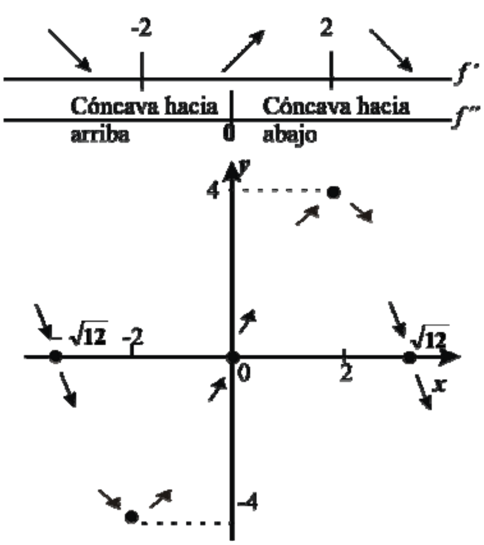
Con el eje y debemos plantear $x=0$.

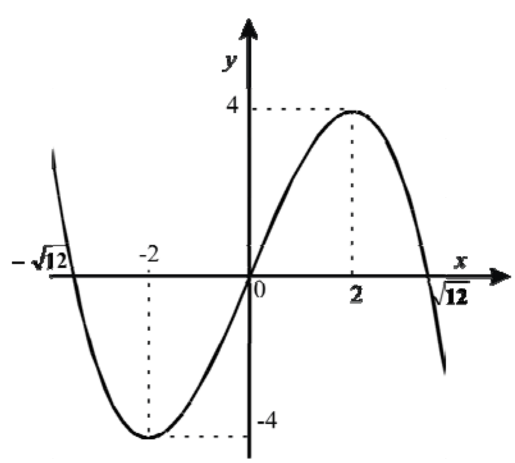
$$y(0)=\frac{-0^3}{4}+3\cdot 0=0$$

Ahora hacemos la tabla de valores.

x	$y=f(x)$	Puntos característicos
-2	-4	Pto. critico
2	4	Pto.. critico
0	0	Pto. de inflexión. Corte con los ejes
$\pm\sqrt{12}$	0	Cortes con el eje x

Llevamos la información de los intervalos de monotonía y concavidad cuadrados con los ejes coordenados del plano y graficamos los puntos dados en la tabla. Las flechas indican la monotonía de la función y como tienen que llegar a los puntos graficados. Siempre es conveniente dibujar la gráfica cerca del punto de inflexión como una recta (con pendiente aproximadamente la derivada evaluada en ese punto). En el resto de la gráfica se sigue la información de concavidad y se une los puntos con un trazo suave.

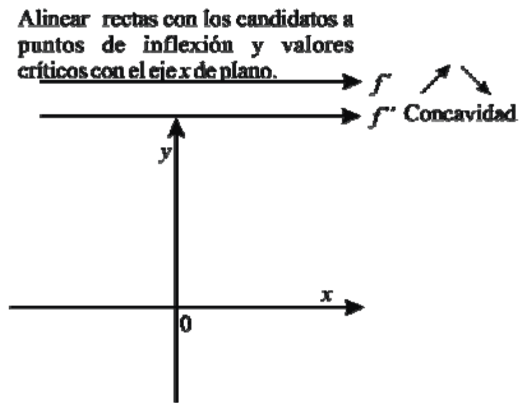




Ejercicio de desarrollo Trazar la gráfica de $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

EJERCICIOS 3.7

1) Rellene la información sobre cada una de las gráficas de las siguientes funciones. Represente los puntos de la tabla de valores en el plano. Si es extremo relativo, desplace las flechas que corresponda a monotonía antes y después del punto, si es punto de inflexión coloque una recta con la inclinación dada por la derivada en ese punto. Por último grafique.



1.1) $y = -x^2 + \dfrac{x^4}{6}$ **; 1.2)** $y = 6x(x-1)^2 - 1$.

2) En cada uno de los siguientes ejercicios, dibuje una función continua *f* en el intervalo en el intervalo indicado [0,5] que satisfaga las condiciones dadas.

2.1) $f(0) = 2$; $f(3) = 0$; $f(5) = 3$

$f'(x) < 0$ en $(0,3)$; $f'(x) > 0$ en $(3,5)$;

$f''(x) > 0$ en $(0,4)$; $f''(x) < 0$ en $(4,5)$.

2.2) $f(0) = -16$; $f(2) = 4$; $f(1) = f(4) = 0$

$f'(x) < 0$ en $(2,4)$; $f'(x) > 0$ en $(0,2) \cup (4,5)$;

$f''(x) > 0$ en $(3,5)$; $f''(x) < 0$ en $(0,3)$.

3) Para cada una de las siguientes funciones determine: dominio, intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad, extremos relativos, puntos de inflexión, simetrías y aquellas intersecciones que puedan obtenerse convenientemente. Bosqueje la gráfica.

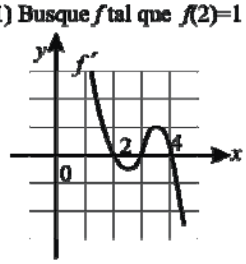
3.1) $y = x^2 - 2x + 1$**;** **3.2)** $y = \dfrac{x^4}{2} - 2x^3 + 2x^2$**;** **3.3)** $y = x^4 - 2x^3 - 1$**;**

3.4) $y = 3x^2 - x^3$**;** **3.5)** $y = x^4 - 2x^2$**;** **3.6)** $y = 3x^5 - 5x^3$**;**

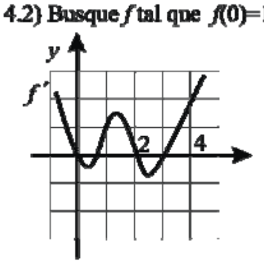
3.7) $y = (1 + 2x^2)^4$**;** **3.8)** $y = -x^4 + 2x^3$**;** **3.9)** $y = (1-x)^4(x+2)^3$**.**

4) Las siguientes gráficas son las gráficas de las funciones derivadas $f'(x)$ de $f(x)$. Describa, para cada una de ellas, la función $y = f(x)$ y bosqueje una gráfica posible de $f(x)$ con la condición dada en cada una.

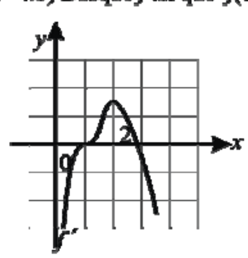
4.1) Busque *f* tal que *f*(2)=1



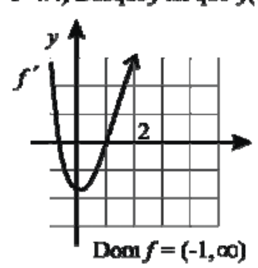
4.2) Busque *f* tal que *f*(0)=1



4.3) Busque *f* tal que *f*(1)=1

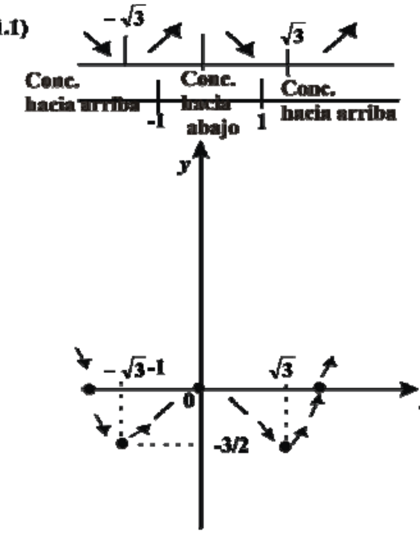


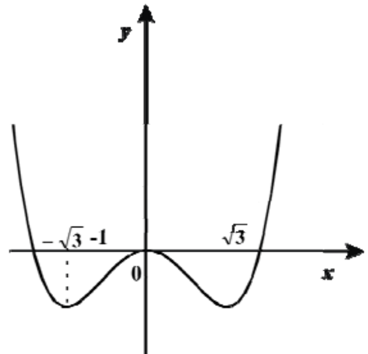
4.4) Busque *f* tal que *f*(1)=1



Respuestas:

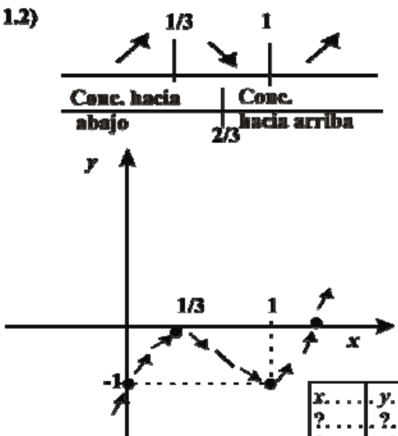
1.1)





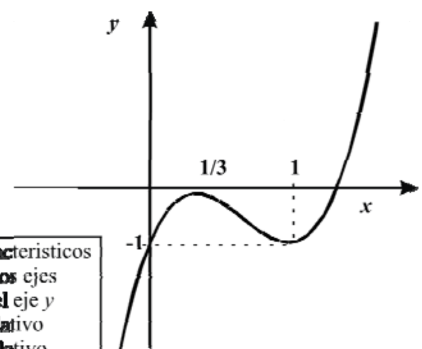
x	y	Puntos característicos
0	0	Corte con los ejes
$\pm\sqrt{6}$	0	Corte con el eje *x*
$\pm\sqrt{3}$	3/2	Mínimo relativo
±1	5/6	Punto de inflexión

1.2)

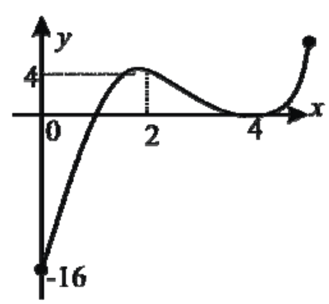


Por la gráfica hay un corte con el eje *x*, pero no se puede determinar por ninguno de los métodos algebraicos vistos

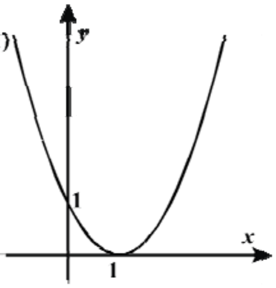
x	y	Puntos característicos
?	?	Corte con los ejes
0	-1	Corte con el eje *y*
1	-1	Mínimo relativo
1/3	-1/9	Máximo relativo
2/3	-5/9	Punto de inflexión



2.2) Una posible solución.

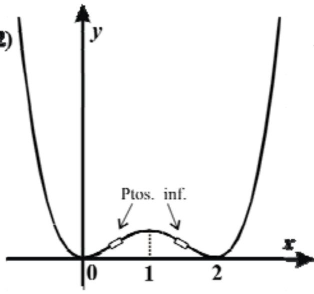


3.1)



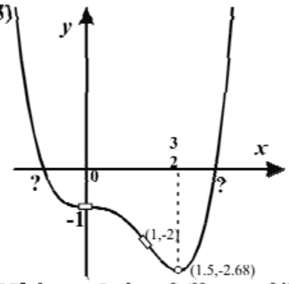
Mínimo relativo 0 en x=1
Decrece: $(-\infty,1)$
Crece: $(1,\infty)$
Conc. hacia arriba: R
Cortes con los ejes: (0,1)y (1,0)

3.2)



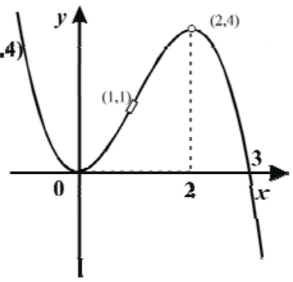
Valor máximo 1/2 en x=1
Valor mínimo 0 en x=0 y x=2
Crece: $(0,1)\cup(2,\infty)$
Decrece: $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$
Concavidad hacia arriba:
$(-\infty,1-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(1+\frac{\sqrt{3}}{3},\infty)$
Concavidad hacia abajo:
$(1-\frac{\sqrt{3}}{3},1+\frac{\sqrt{3}}{3})$

3.3)



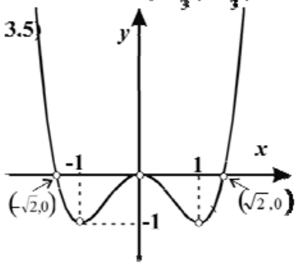
Mínimo relativo -2.68 en x=3/2
Crece: $(3/2,\infty)$
Decrece: $(-\infty,0)\cup(0,3/2)$
Concavidad hacia arriba: (0,1)
Concavidad hacia abajo:
$(-\infty,0)\cup(1,\infty)$
Puntos de inflexión en x=0 y 1
Cortes x: No se puede por Ruff.

3.4)



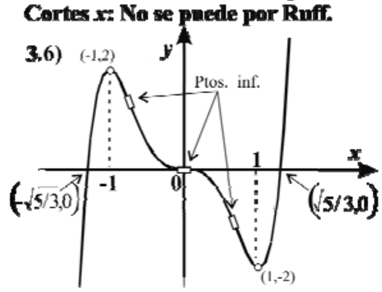
Valor máximo relativo 4 en x=2
Valor mínimo relativo 0 en x=0
Crece: (0,2)
Decrece: $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$
Cóncava hacia arriba: $(-\infty,1)$
Cóncava hacia abajo: $(1,\infty)$
Punto de inflexión en x=1.
Cortes con los ejes: (3,0) y(0,0)

3.5)



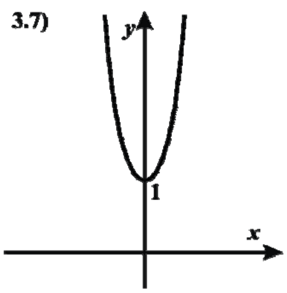
Máximo relativo 0 en x=0
Mínimos relativos en x=1 y -1
Crece: $(-1,0)\cup(1,\infty)$
Decrece: $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
Concavidad hacia arriba:
$(-\infty,-\sqrt{3}/3)\cup(\sqrt{3}/3,\infty)$
Concavidad hacia abajo:
$(-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$
Puntos de inflexión en x= $-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3$

3.6)



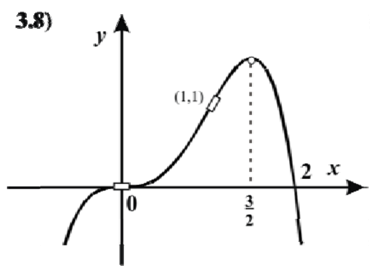
Valor máximo rel. 2 en x=-1
Valor mínimo rel. -2 en x=1
Crece: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
Decrece: $(-1,0)\cup(0,1)$
Concavidad hacia arriba:
$(-\sqrt{2}/2,0)\cup(\sqrt{2}/2,\infty)$
Concavidad hacia abajo:
$(-\infty,-\sqrt{2}/2)\cup(0,\sqrt{2}/2)$
Puntos de inflexión en x=0, $-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2$

3.7)



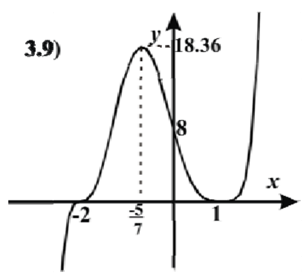
Mínimo relativo 1 en x=0
Crece: $(0,\infty)$
Decrece: $(-\infty,0)$
Concavidad hacia arriba: R
Cortes con x no hay.
Cortes con y: (0,1).

3.8)



Máximo relativo 27/16 en x=3/2
Crece: $(-\infty,0)\cup(0,3/2)$
Decrece: $(3/2,\infty)$
Cóncavo hacia arriba: (0,1).
Cóncava hacia abajo: $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$
Puntos de inflexión en x=0 y 1
Cortes con los ejes: (0,0) y(2,0).

3.9)



Máximo relativo en x=-5/7
Mínimo relativo en x=1
Crece: $(-\infty,-2)\cup(-2,-5/7)\cup(1,\infty)$
Decrece: $(-5/7,1)$
Cóncava hacia arriba:
$(-2,\frac{-5-3\sqrt{2}}{7})\cup(\frac{-5+3\sqrt{2}}{7},1)\cup(1,\infty)$
Cóncava hacia abajo:
$(-\infty,-2)\cup(\frac{-5-3\sqrt{2}}{7},\frac{-5+3\sqrt{2}}{7})$

3.8 Gráficas de funciones racionales

Las funciones racionales son de la forma:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas. Recuerde que el dominio de este tipo de función es

$$Dom\quad f=\left\{x\quad tales\quad que\quad q(x)\neq 0\right\}.$$

Es decir son todos los x donde el denominador no se anula. Recordamos que los c donde el denominador se anula definen los candidatos $x=c$ a ser asíntotas verticales.

Para graficarlas se suele seguir los siguientes pasos:

1.- Calcular **el dominio** de la función.

2.- Hallar la primera derivada para luego calcular **puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos.** Se recomienda llevar esta información a la recta real colocada encima del plano cartesiano donde se realizará la gráfica y alineada con el eje x de este plano.

3.- Calcular la segunda derivada para luego determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión. Se recomienda llevar esta información a otra recta real cuadrada con la recta real del crecimiento y con el eje x del plano donde se realizará la gráfica.

4.- Determinar las asíntotas verticales. Determinar las asíntotas en infinito: horizontales y oblicuas. Dibujar las asíntotas con un trazo punteado en el plano donde se bosquejará la gráfica de la función.

5.- Calcular algunos puntos de interés de la gráfica, llevándolos a una tabla de valores. Esto son los puntos críticos, puntos de inflexión, intersección con el eje y e intersecciones con el eje x si resulta fácil de calcular. (Recuerde, por ejemplo, que el valor crítico, x_0, debe ser evaluado en la propia función para obtener el punto crítico $(x_0, f(x_0))$ el cual es un punto de la gráfica de *f*). Graficar estos puntos, (se recomienda trazar tenuemente las flechas de crecimiento y decrecimiento antes y después de estos puntos característico). Puede ser de gran ayuda dibujar un trozo de gráfica en la zona donde la gráfica se acerca a la asíntota y luego unir los puntos característicos junto con los pequeños trazos de la gráfica de acuerdo a la información aportada por los puntos anteriores.

Insistimos en recomendar que los puntos de la gráfica obtenidos por los numerales 2 y 3 se coloquen en rectas reales alineadas con el eje x del plano sobre el que vamos hacer la gráfica, para un mejor manejo de la información conseguida. Recuerde que la gráfica se aproxima a las asíntotas horizontales u oblicuas cuando x toma valores muy grandes. La gráfica se acerca a las asíntotas verticales para valores grandes (positivos o negativos según corresponda) de y.

Ejemplo 1.- Para la función $y=\frac{2}{1-x^2}$ Determine: dominio intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad; extremos relativos; puntos de inflexión; asíntotas horizontales y verticales y aquellas intersecciones que puedan obtenerse convenientemente. Bosqueje la gráfica de la función.

Solución:

1.- Calcular el dominio de la función.

El dominio de está función son todos los reales excepto los puntos donde el denominador se hace 0. Estos puntos son:

$$1-x^2=0$$

$$x=\pm 1.$$

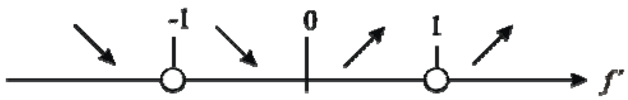
Así

$$\text{Dom}\ \ f=R-\{1,-1\}.$$

2.- Se determinan puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
La primera derivada está dada por:

$$y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

La derivada se anula en $x = 0$ y no existe en $x = \pm 1$.



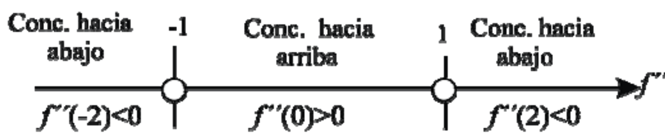
Observe como de nuevos que los valores **donde la propia función *f* no está definida** se los ha representado **con círculos agujereados** en la recta real. Este es el caso de *x*= -1 y 1.

3.- Determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
Es fácil verificar que la segunda derivada puede ser expresada como:

$$y'' = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

La segunda derivada nunca se anula, por tanto no hay candidatos a puntos de inflexión de esta naturaleza.

Por otro lado la segunda derivada no está definida en -1 y 1, pero la propia función tampoco está definida en estos puntos, por consiguiente no pueden haber punto de inflexión allí; sin embargo puede haber cambio de de concavidad -1 y 1. Como efectivamente ocurre cuando tomamos valores de prueba dentro de los intervalos.



En conclusión: no hay puntos de inflexión. La gráfica presenta concavidad hacia arriba en el intervalo $(-1,1)$ y concavidad hacia abajo en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

4.- Calcular las asíntotas verticales y en el infinito.
Para **las asíntotas verticales** planteamos en este caso denominador=0, para encontrar los candidatos. Esta ecuación es $x^2-1=0$ y las soluciones son $x=-1$ y $x=1$
Se calculamos los límites para chequear

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{1-x^2} = -\infty. \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{2}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{1-x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to -1^-}\frac{2}{1-x^2} = -\infty.$$

Así $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales. Los resultados de estos límites pueden ser esquematizados en el bosquejo de la gráfica de la función mediante un pequeño trazo vertical lo más arriba o más abajo según sea el caso ($+\infty$ ó $-\infty$) a la derecha o la izquierda de la asíntota vertical como indique el límite lateral. Recuerde que la asíntota se suele dibujar con un trazo punteado.

Asíntotas en el infinito: Sabemos que tiene asíntota horizontal pues es una función racional con el grado del numerador menor o igual al grado del denominador. Para determinar las asíntotas horizontales calculamos los límites al infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-x^2}=0 \quad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-x^2}=0$$

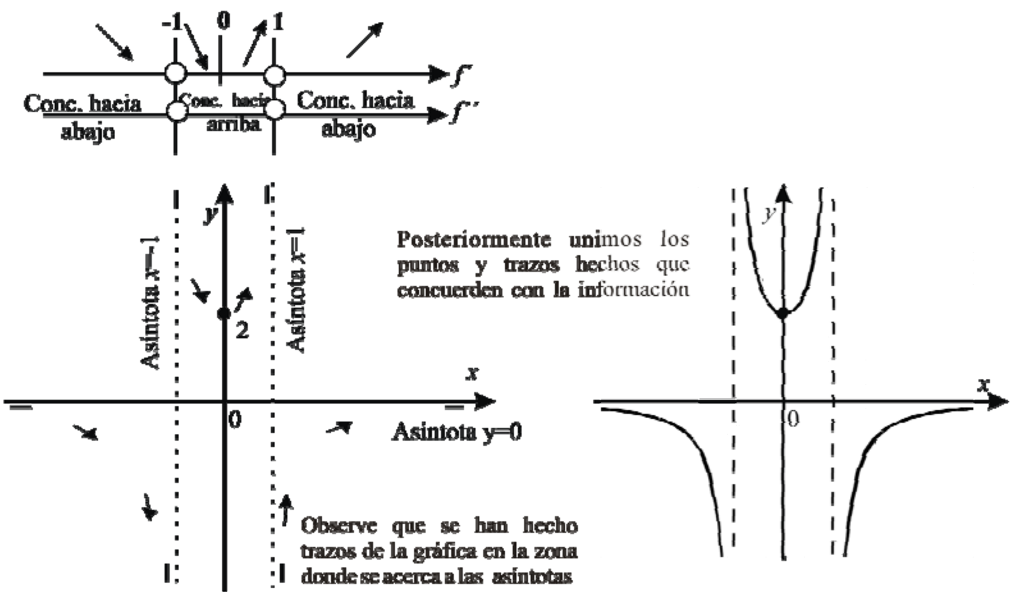
Concluimos que $y=0$ es asíntota horizontal por la derecha y la izquierda. Es claro que no tiene asíntota oblicua.

5.- Calcular algunos puntos de la gráfica de interés. Suelen ser los puntos críticos, puntos de inflexión, intersección con el eje *y* e intersecciones con el eje *x* si resulta fácil de calcular. Graficar estos puntos y luego unirlos de acuerdo a la información aportada por **1** y **2.**
Para **las intersecciones con el eje *x* planteamos *y*=0**, esto es

$\frac{2}{1-x^2}=0$. Como esta ecuación no tiene solución entonces no hay corte con el eje *x*.

La intersección con el eje *y*: evaluamos *f* en 0. $f(0)=\frac{2}{1-0^2}=2$. Este punto también es punto crítico.

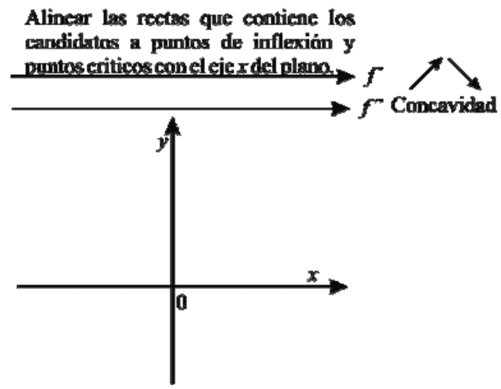
Llevamos toda la información en el siguiente gráfico, incluyendo la información de los límites obtenidos arriba.



Ejercicio de desarrollo.- Para la función $y=\frac{x^2}{1-x}$ Determine: dominio, intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad, extremos relativos; puntos de inflexión, asíntotas verticales y en el infinito y aquellas intersecciones que puedan obtenerse con los métodos analíticos conocidos en la resolución de ecuaciones. Bosqueje la gráfica de la función.

EJERCICIOS 3.8

1) Rellene la información sobre cada una de las gráficas de las siguientes funciones. Represente los puntos de la tabla de valores en el plano. Si es extremo relativo, desplace las flechas que corresponda a monotonía antes y después del punto, si es punto de inflexión coloque una recta con la inclinación dada por la derivada en ese punto. En caso que exista asíntota de algún tipo, dibuje la gráfica en la zona donde se acerca a la asíntota o represente un trozo de asíntota. Por último obtenga un bosquejo de la grafica.



1.1) $y = x^2 - \dfrac{1}{4x}$; **1.2)** $y = x - \dfrac{6}{x-1}$; **1.3)** $y = x + \dfrac{x}{x^2-1}$.

2) Para las siguientes funciones determine: dominio, intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad, extremos relativos, puntos de inflexión, asíntotas verticales, asíntotas en el infinito y aquellas intersecciones que puedan obtenerse por métodos analíticos convencionales. Bosqueje la gráfica de la función.

2.1) $y = \dfrac{2+x}{x}$; **2.2)** $y = \dfrac{10}{x^2-9}$; **2.3)** $y = \dfrac{x^3+1}{x^3}$; **2.4)** $y = (2+x)^4$;

2.5) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; **2.6)** $y = \dfrac{2}{x+1}$; **2.7)** $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; **2.8)** $y = \dfrac{x^2}{x^2+2}$;

2.9) $y = \dfrac{2+x^2}{x-1}$; **2.10)** $y = \dfrac{2+x^2}{2-x^2}$; **2.11)** $y = x + \dfrac{1}{x+2}$; **2.12)** $y = \dfrac{1}{x^3-x}$.

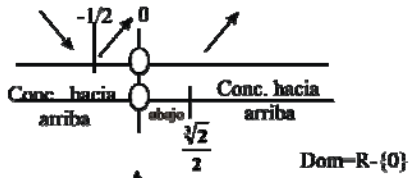
2) El nivel de ventas de un producto nuevo, después de *t* semanas de haberse introducido con una buena campaña publicitaria, está dado por $V(t) = \dfrac{100t}{(t+1)^2}$. Grafique la función Ventas semanales. Explique como esperan los empresarios que se comporte este nuevo producto.

3) Suponga que la productividad de un trabajador por hora como una función de *t* está dada por $P(t) = 20 + 15\dfrac{t^2}{t^2+1000}$,donde *t* es el número de meses de experiencia. Grafique y describa el comportamiento del trabajador en función del tiempo.

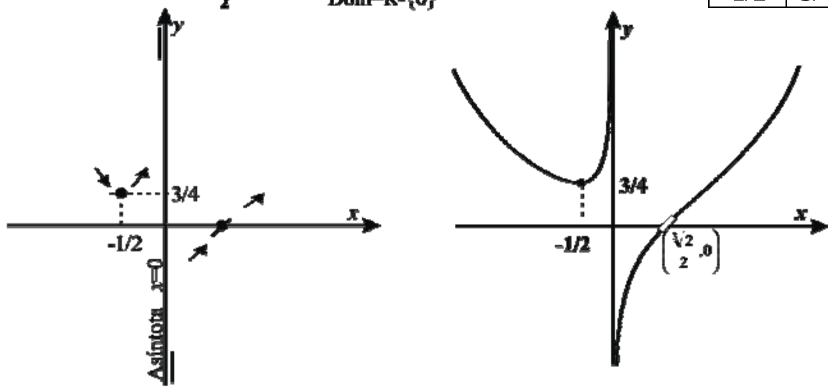
4) Dibuje la curva de elasticidad para la siguiente ecuación de demanda $q = \dfrac{100}{(p+4)^2}$. ¿Cuál es el máximo de esta función? ¿Para qué precio la demanda es unitaria? Interprete su gráfico. **Respuesta:** $\eta = -\dfrac{2p}{p+4}$.

5) Dibuje la curva de elasticidad para la siguiente ecuación de demanda $q = b - mp$, con $m > 0$.
¿Para qué precio la demanda es unitaria? Interprete su gráfico. De acuerdo a su gráfica diga cuando la demanda es elástica. Tome en cuenta el dominio natural de *p*. **Respuesta:** La función a graficar está dada por $\eta = \dfrac{mp}{mp-b}$.

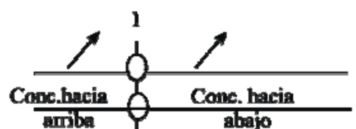
1.1)



x	y	Ptos.caracteristicos
No		Corte con y
$\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$	0	Cortes con x Pto. inflexión
-1/2	3/4	Mínimo relativo

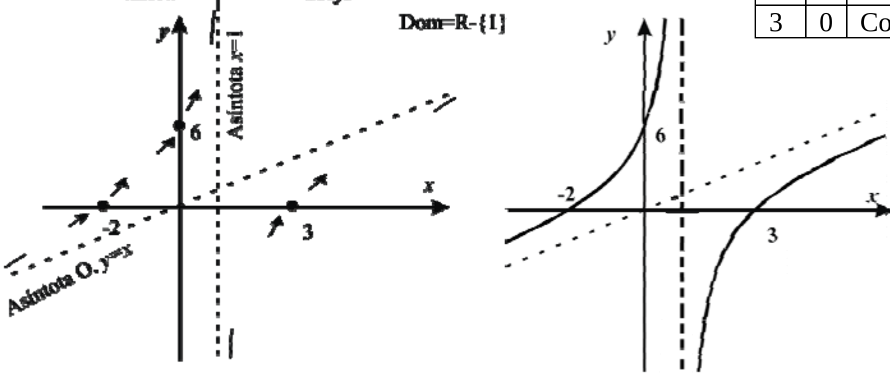


1.2)

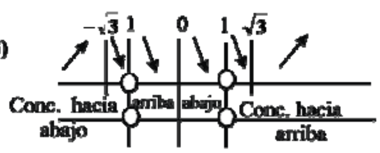


Dom=R-{1}

x	y	Ptos.caracteristicos
0	6	Corte con y
-2	0	Cortes con x
3	0	Corte con x

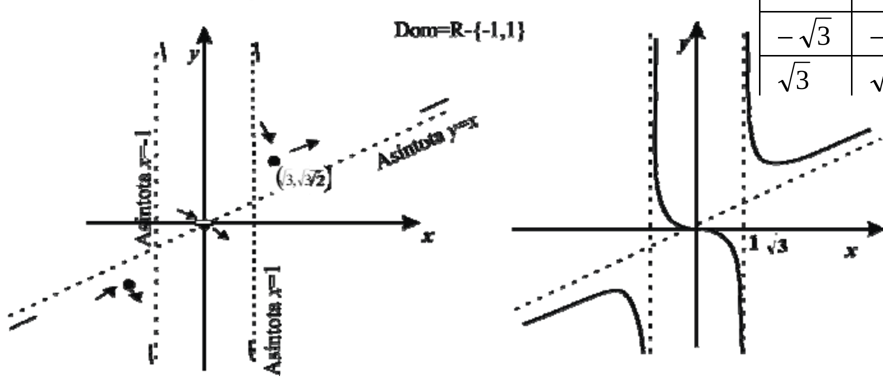


1.3)



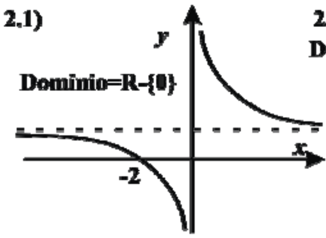
x	y	Ptos.caract.
0	0	Cortes Pto. inflexión
$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/2$	Mín. relativo
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	Máx.relativo

Dom=R-{-1,1}



2.1)

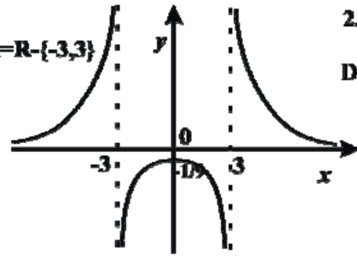
Dominio=R-{0}



Decrece: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
Conc. hacia arriba: $(0,\infty)$
Concavidad hacia abajo: $(-\infty,0)$
Corte con los ejes: (-2,0)
Asíntota Horizontal $y=1$
Asíntota Vertical $x=0$

2.2)

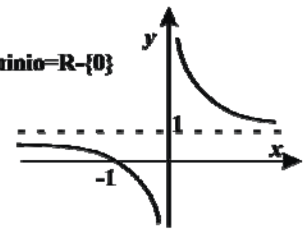
Dom=R-{-3,3}



Valor máximo relativo -1/9 en $x=0$
Crece: $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$
Decrece: $(0,3)\cup(3,\infty)$
Concavidad hacia arriba: $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$
Concavidad hacia abajo: (-3,3)
Asíntota Horizontal $y=0$
Asíntotas Verticales $x=-3$ **y** $x=3$

2.3)

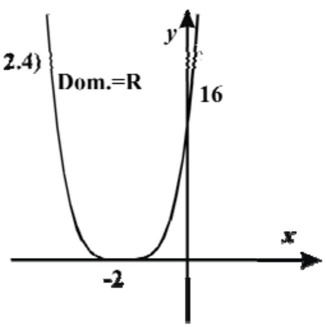
Dominio=R-{0}



No hay extremos
Decrece: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
Concavidad hacia arriba: $(0,\infty)$
Concavidad hacia abajo: $(-\infty,0)$
Cortes x**:** (-1,0)
Asíntota Horizontal $y=1$
Asíntota Vertical $x=0$

2.4)

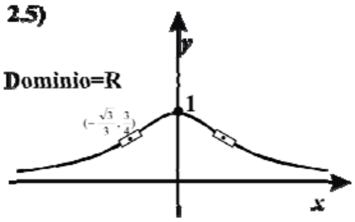
Dom.=R



Mínimo relativo 0 en $x=-2$
Crece: $(-2,\infty)$
Decrece: $(-\infty,-2)$
Cóncava hacia arriba: R
Cortes con los ejes:
(-2,0) y (0,16)

2.5)

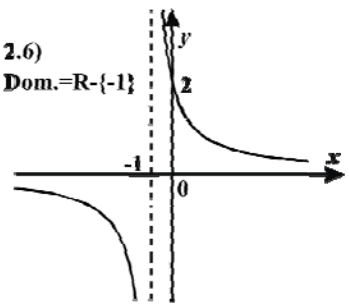
Dominio=R



Máximo relativo 1 en $x=0$
Crece: $(-\infty,0)$
Decrece $(0,\infty)$
Concavidad hacia arriba:
$(-\infty,-\sqrt{3}/3)\cup(\sqrt{3}/3,\infty)$
Concavidad hacia abajo: $(-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$
Puntos de inflexión en $x=\pm\sqrt{3}/3$
Asíntota Horizontal $y=0$.
Corte sólo con el eje y**:** (0,1)

2.6)

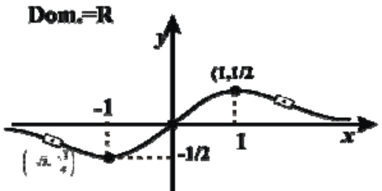
Dom.=R-{-1}



Decrece: $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$
Concavidad hacia arriba: $(-1,\infty)$
Concavidad hacia abajo: $(-\infty,-1)$
Asíntota Horizontal $y=0$
Asíntota Vertical $x=-1$
Corte sólo con el y**:** (0,2)

2.7)

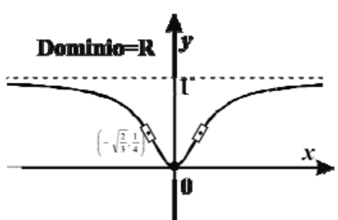
Dom.=R



Máximo relativo 1/2 en $x=1$
Mínimo relativo -1/2 en $x=-1$
Crece:(-1,1)
Decrece: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
Concavidad hacia arriba:
$(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},\infty)$
Concavidad hacia abajo:
$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$
Punto de inflexión en $x=0,\pm\sqrt{3}$
Asíntota Horizontal $y=0$

2.8)

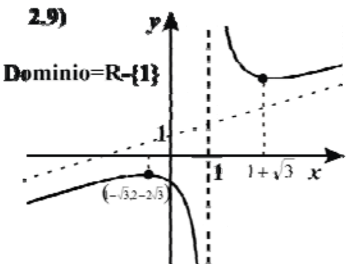
Dominio=R



Mínimo relativo 0 en $x=0$
Crece: $(0,\infty)$
Decrece: $(-\infty,0)$
Cóncava hacia arriba: $(-\sqrt{2/3},\sqrt{2/3})$
Cóncava hacia abajo: $(-\infty,-\sqrt{2/3})\cup(\sqrt{2/3},\infty)$
Punto de inflexión en $x=\pm\sqrt{2/3}$
Asíntota Horizontal $y=1$

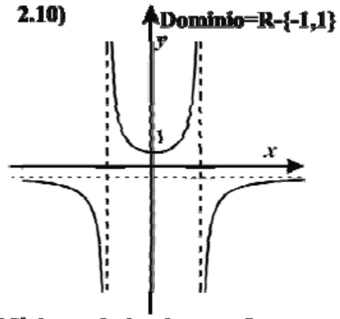
2.9)

Dominio=R-{1}



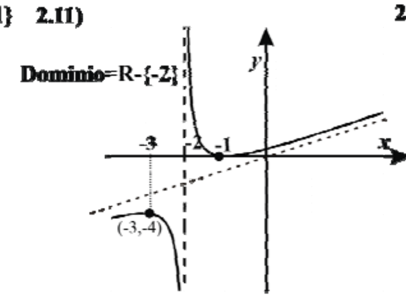
Máximo relativo en $x=1+\sqrt{3}$
Mínimo relativo en $x=1-\sqrt{3}$
Crece: $(-\infty,1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3},\infty)$
Decrece: $(1-\sqrt{3},1)\cup(1,1+\sqrt{3})$
Cóncava hacia arriba: $(1,\infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-\infty,1)$
Asíntota Vertical $x=1$
Asíntota Oblicua $y=x+1$

2.10)



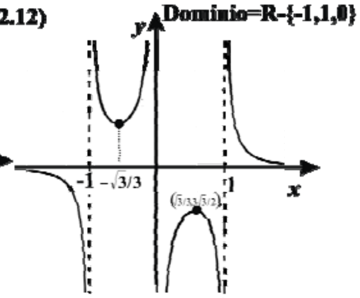
Mínimo relativo 1 en x=0
Crece: $(0,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$
Decrece: $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},0)$
Concavidad hacia arriba: $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$
Concavidad hacia abajo:
$(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$
Asíntota Horizontal y=-1
Asíntotas Verticales $x=\sqrt{2}$ y $x=-\sqrt{2}$

2.11)



Máximo relativo -4 en x=-3
Mínimo relativo 0 en x=-1
Crece: $(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$
Decrece: $(-3,-2)\cup(-2,-1)$
Cóncava hacia arriba: $(-2,\infty)$
Cóncava hacia abajo: $(-\infty,-2)$
Asíntota Oblicua: y=x
Asíntota Vertical: x= -2

2.12)



Máximo relativo en $x=\sqrt{3}/3$
Mínimo relativo en $x=-\sqrt{3}/3$
Crece: $(-\sqrt{3}/3,0)\cup(0,\sqrt{3}/3)$
Decrece:
$(-\infty,-1)\cup(-1,-\sqrt{3}/3)\cup(\sqrt{3}/3,1)\cup(1,\infty)$
Cóncava hacia arriba:
$(-1,0)\cup(1,\infty)$
Cóncava hacia abajo
$(-\infty,-1)\cup(0,1)$
Asíntota Horizontal y=0
Asíntotas Verticales x=0, x=-1 y x=1

3.9 Graficadores

Hoy en día se cuenta con una amplia oferta de graficadores a través de calculadoras portátiles y softwares de computadoras. En los actuales momentos se puede acceder a un programa interactivo gratuito que permite graficar funciones, su nombre es fooplot. Este software pueden ser usado desde cualquier computadora con acceso a INTERNET sin necesidad de descargar ningún archivo. Por otro lado, existen infinidad de softwares comerciales, donde no solo se pueden graficar ecuaciones y funciones, sino también realizar operaciones algebraicas y de cálculo. Algunos de ellos son MATLAB, MAPLE, MATHEMATICA, etc. Especialmente recomendamos el software MAXIMA por ser un software gratuito que puede ser bajado desde Internet.

La mayoría de estos softwares usan codificaciones similares para escribir funciones. Las operaciones básicas son codificadas de manera bastante estándar.

Operación	codificación
Suma	*x+y*
resta	*x-y*
multiplicación	*x*y* (a veces entiende *xy*)
división	*x/y*
potencia	*x*^2

Las codificaciones de las principales funciones son similares salvo el logaritmo, el cual se recomienda buscarlo en las ayudas del software que se este usando.

Funciones	codificación
Exponencial e^x	exp(*x*)
Logaritmo	Buscar en manuales
Radicación $\sqrt{x}$	sqrt(*x*), sqrt[*x*]

Para codificar expresiones es conveniente conocer el orden con que el computador evalúa las expresiones matemáticas. Esto ayudará a escribir expresiones más sencillas.
El orden de prioridad está dado por:

1.- Se resuelven los paréntesis o delimitadores más internos. La mayoría de los softwares usa solo paréntesis.
2.- Se evalúan las funciones. (exp, sqrt, sin, etc).
3.- Se evalúan las potencias. Si aparecen dos o más potencias se evalúan de izquierda a derecha.
4.- Se evalúa * y / de izquierda a derecha.
5.- Se evalúa + y **-** de izquierda a derecha.

Algunos ejemplos de codificación

Formula matemática	Codificación	Comentarios
$2+\dfrac{1}{x+1}$	2+1/(*x*+1)	Es necesario el paréntesis para indicar que la división es entre *x*+1
$\dfrac{2x^2-3x}{x+1}$	(2*x^^2-3**x*)/(*x*+1)	El numerador también necesita paréntesis.
$3\,e^{2x-1}$	3*exp(2**x*-1)	La expresión donde se evalúa la exponencial va entre paréntesis
$\sqrt{e^{-x}+1}$	Sqrt(exp(-*x*)+1)	

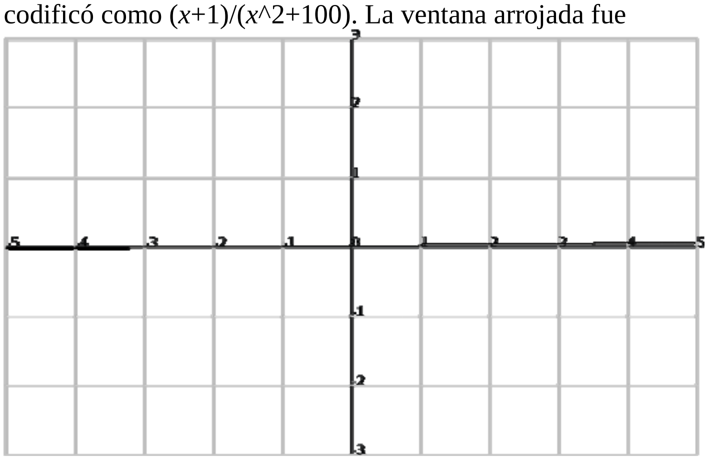
Ejercicio de desarrollo.- Codifique $\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$

Recuerde que en cada software hay variantes en la codificación, pero la mayoría no se apartan mucho de las reglas dadas arriba. El usuario deberá siempre acceder la página de ayuda del software para ver los cambios que hay.

Uno de los problemas que puede presentar el estudiante en el momento de la graficación a través de la herramienta computacional es la selección del escalamiento o la ventana, es decir especificar el rango de valores de las variables a graficar. No siempre la ventana dada por el software es la más apropiada para resaltar las características más importantes de la gráfica de la función. En la mayoría de los casos el usuario deberá seleccionar el escalonamiento de ambas variables.

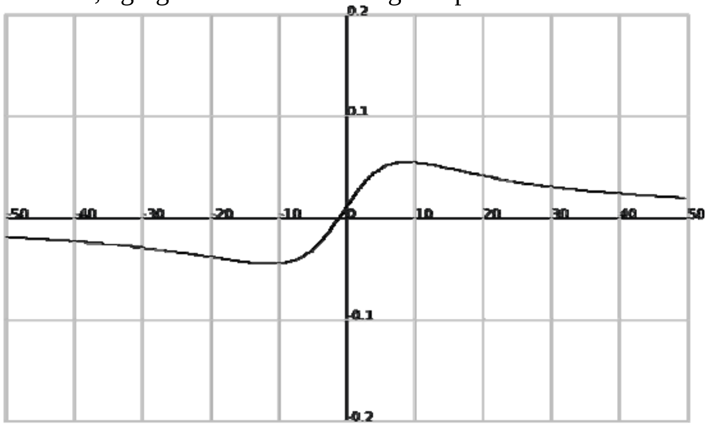
El conocimiento adquirido hasta ahora para graficar funciones resulta muy útil para seleccionar una ventana apropiada que realce las características de la gráfica. El estudiante tendrá que analizar dominio y rango de la función a graficar y tomando este aspecto en cuenta estará pendiente de buscar una ventana adecuada donde se realcen asíntotas, puntos máximos y mínimos, cortes entre otras características.

Ejemplo 1.- La función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+100}$ fue graficada usando el software fooplot, la función se codificó como (*x*+1)/(*x*^2+100). La ventana arrojada fue



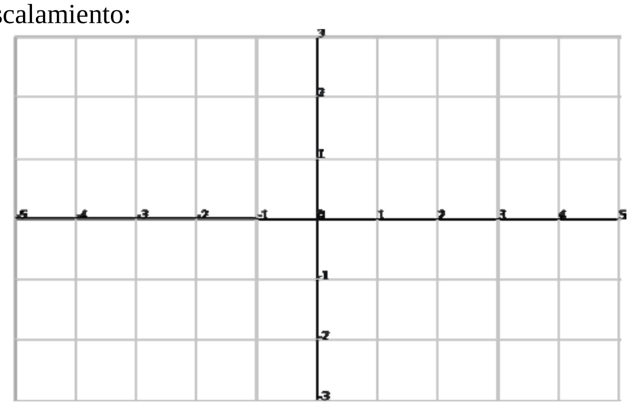
Observe que en la figura no se puede percibir el comportamiento de la función. Se hizo un reescalamiento en base a los valores que asume la función y a que tiene una asíntota horizontal.

El eje x se modificó de -50 a 50 y el eje y de -0.2 a 0.2 obteniendo la siguiente ventana. Para obtener el reescalamiento con este software se debe ir a la parte de dominio y rango y oprimir customs, agregando los valores elegidos por el usuario.

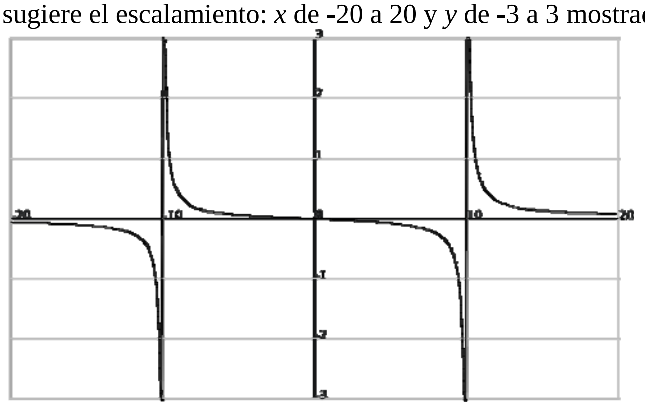


Esta ventana ofrece una mejor idea del comportamiento de la función.

Ejemplo 2.- La siguiente es la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-100}$ dada por fooplot sin dar especificaciones del escalamiento:



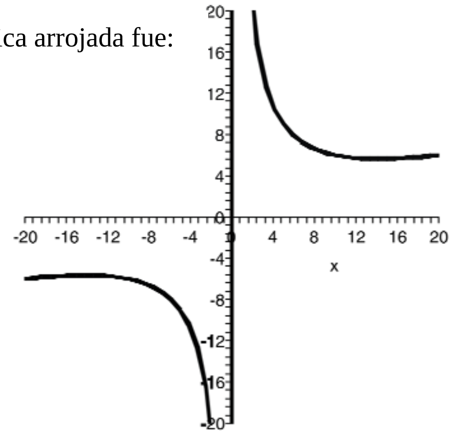
Conociendo que la función tiene asintotas verticales en $x=\pm 10$, asíntota horizontal y=0 y después de algunos ensayos se sugiere el escalamiento: x de -20 a 20 y y de -3 a 3 mostrada abajo



Ejemplo 3.- La gráfica de $f(x)=\dfrac{x}{5}+\dfrac{40}{x}$ en la escala -20 a 20 en ambos ejes fue hecha en MAPLE, el comando fue:

>plot(x/5+40/x,x=-20..20,y=-20..20,tickmarks=[10,10],color=black,thickness=2);

La gráfica arrojada fue:



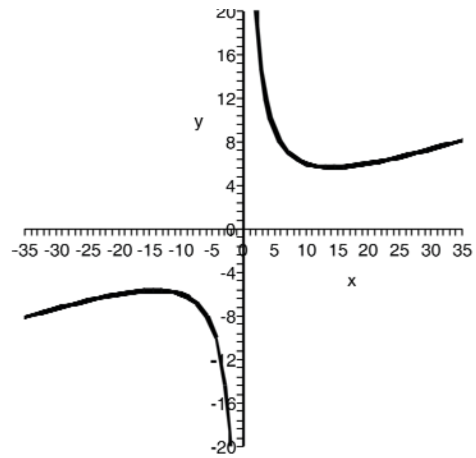
La siguiente instrucción permite obtener la misma gráfica en MAXIMA:

(%i1) plot2d(x/5+40/x,[x,-20,20],[y,-20,20]);

Una característica que se ha perdido con este escalamiento son los extremos relativos de la función, así como el comportamiento de una asíntota oblicua.

Un nuevo escalamiento en donde se intenta que exista un intervalo amplio después de los números críticos $x=\pm 10\sqrt{2}$ realza la forma de la gráfica.

En esta última gráfica incluso se puede estimar los valores extremos y apreciar la asíntota oblicua.



EJERCICIOS 3.9

1) Para cada una de las siguientes funciones obtener la gráfica usando algún graficador que tenga a su disposición. Deberá escoger una ventana que resalte las características más notorias de la gráfica. Ésta debe reflejar asíntotas, cortes con los ejes, extremos si los hay y alguna otra característica de interés. Con algunas de las gráficas quizás quede insatisfecho con los resultados de la computadora entonces grafique a mano o muestre dos o más ventanas. Luego haga un pequeño reporte señalando los puntos críticos determinados gráficamente, las asíntotas, los cortes y como se ven o no reflejada esta información en la gráfica obtenida por la computadora.

1.1) $y=\dfrac{x^2-100}{x-9.9}$; **1.2)** $y=\dfrac{x\left(\sqrt{20}-\sqrt{x}\right)}{19.9-x}$; **1.3)** $y=\dfrac{\sqrt{x-29.9}}{x-30}$;

1.4) $y=\dfrac{x^2-100}{\sqrt{x}-\sqrt{9.9}}$; **1.5)** $y=\dfrac{x-20}{\sqrt{19.9-x}}$; **1.6)** $y=\dfrac{\sqrt{x^2-30.1}}{x^2-30}$.

2) Para cada una de las siguientes funciones obtener la gráfica usando algún graficador que tenga a su disposición. Deberá escoger una ventana que resalte las características más notorias de la gráfica. Para escoger una ventana apropiada use sus conocimientos de asíntotas y dominio y rango de la función. Realice un reporte donde diga: **a)** Dominio de la función. **b)** Candidatos a asíntotas y comentarios de lo que ocurre gráficamente; **c)** Estimaciones de los cortes con los ejes a través de la gráfica. **d)** Estimaciones de máximos y mínimos relativos a través de la gráfica

2.1) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x}}$; **2.2)** $y=\dfrac{(x+1)^2-x^3}{(x-4)^2\sqrt{x+2}}$; **2.3)** $y=\dfrac{x^2-3-\sqrt{x^2-36}}{(x-1)}$;

2.4) $y=\ln(x-1)-e^x$; **2.5)** $y=x^2\ln(x+1)$; **2.6)** $y=x^2+(\ln(x+1))^2$.

3.10 Trazado de curvas generales

Es imposible clasificar la gran variedad de curvas existentes. Para funciones más generales las recomendaciones para graficar serán las mismas que en la sección pasada. Recuerde que un aspecto importante a considerar es la determinación del dominio. Esté pendiente si hay un radical de índice par en la definición de la función, en ese caso, recuerde que el dominio está restringido donde el radicando es mayor o igual a cero. Igual consideración si hay un logaritmo, en este caso la desigualdad es estricta. Una función con logaritmo puede tener asíntotas en los extremos de su dominio. No se olvide que si hay fracciones, los puntos donde el denominador es cero no están en el dominio de la función y proveen candidatos a asíntotas verticales.

Ejemplo 1.- Para la función $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}$. Determine: dominio, intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad, extremos relativos, puntos de inflexión, asíntotas horizontales, asíntotas en el infinito y aquellas intersecciones que puedan obtenerse convenientemente. Trace la gráfica

Solución:

1.- Para calcular el dominio de la función: planteamos radicando mayor o igual a cero, pero en este caso también debemos plantear que el denominador sea distinto a cero. Esto nos lleva que el dominio es el conjunto de puntos que satisface:

$$x+1>0$$

Resolviendo esta desigualdad obtenemos que:

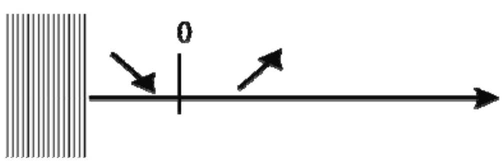
$$\text{Dom } f= (-1,\infty)$$

2.- Calcular puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$y'=-\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{-1+x+1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$

$$y'=\frac{x}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$ De aquí concluimos rápidamente que el único valor crítico es x=0.

En x=-1 tanto la función como la derivada no están definidas. Realizamos el diagrama para clasificar y obtener los intervalos de monotonía, colocando en la recta real el único valor crítico. Observe como se ha tachado la región donde no está definida la función.



Por la prueba de la primera derivada determinamos que $f(0)=2$ es un mínimo relativo y por ser él el único extremo relativo entonces es un mínimo absoluto de la función.

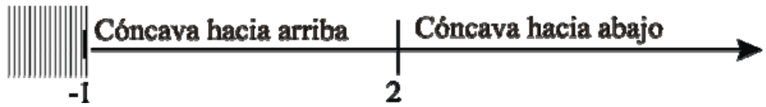
3.-Se determinan intervalos de concavidad y puntos de inflexión. Para ello determinamos la segunda derivada

$$y''=\frac{1\cdot 2(x+3)^{3/2}-x\frac{3}{2}(x+3)^{1/2}}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$

Podemos verificar que

$y'' = -\dfrac{x-2}{4\sqrt{(x+1)^5}}$. La segunda derivada vale cero en x=2, este es un candidato a punto de inflexión.

La segunda derivada no existe en x=-1, la función tampoco está definida allí. Colocamos estos valores en la recta real, eliminando en la recta los puntos que no están en el dominio de la función.



Tenemos entonces que en el punto $(2, f(2)) = \left(2, \dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)$ es un punto de inflexión.

4.- Se calculan las asíntotas verticales y en el infinito.
Asíntotas verticales: $x=-1$ es candidato a asíntota vertical

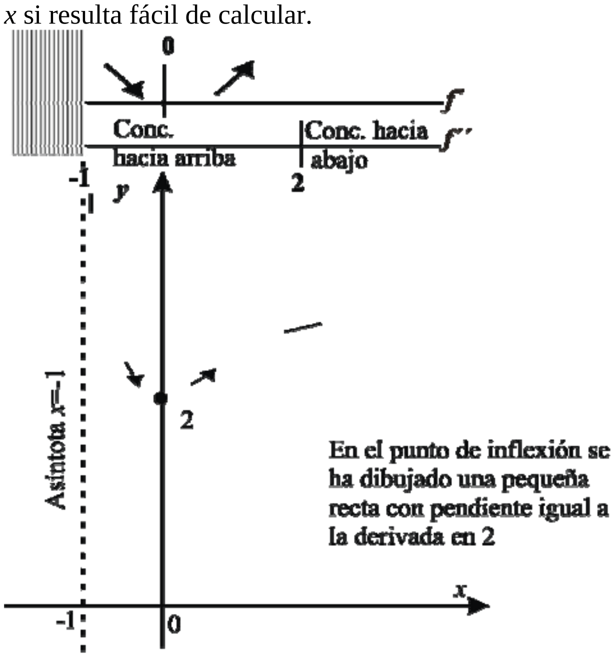
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = +\infty$$

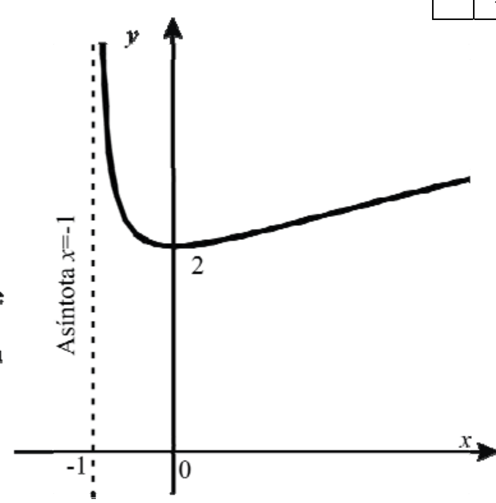
En conclusión $x=-1$ es asíntota vertical. Sólo tiene sentido por el lado derecho.
Asíntotas en el infinito: No tiene asíntotas horizontales pues $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$. Más aún, el comportamiento en el infinito de la gráfica anterior es similar al de $y = \sqrt{x+1}$, ya que $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \to 0$.

No hay asíntotas oblicuas.

5.- Calcular algunos puntos característicos de la gráfica de interés, llevándolos a una tabla de valores. Suelen ser los puntos críticos, puntos de inflexión, intersección con el eje *y* e intersecciones con el eje *x* si resulta fácil de calcular.

x	y
0	2
2	$\dfrac{3}{\sqrt{3}}$





Ejemplo 2.- Para la función $y = e^{\frac{1}{x-1}}$. Determine: dominio, intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad; extremos relativos; puntos de inflexión; simetrías; asíntotas horizontales y verticales y aquellas intersecciones que puedan obtenerse convenientemente. Trace la gráfica

Solución:

1.- Hallar el dominio de la función: La función exponencial no tiene restricciones en el dominio pero el exponente es una expresión fraccionaria, los puntos donde el denominador se hace 0 no están en el dominio de la función. Planteamos entonces

$$x-1=0$$

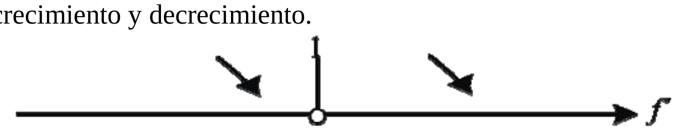
Así que el dominio son todos los reales distintos de uno:

Dom *f*= **R**-{1}

2.- Determinar puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento. **Extremos relativos**

$$y' = -\frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}$$

La ecuación $y'=0$ no tiene solución. Así no hay valores crítico, En la recta real agregamos *x*=1 para el análisis de crecimiento y decrecimiento.



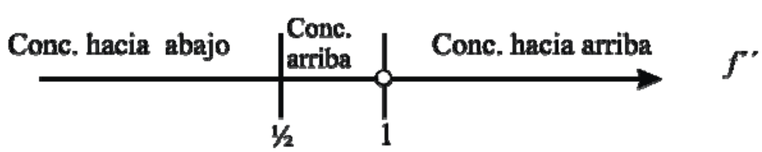
En conclusión, la función no tiene extremos relativos y es decreciente en todo su dominio.

3.- Determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

Podemos verificar que

$$y'' = -\frac{e^{-\frac{1}{x-1}}(2x-1)}{(x-1)^4}.$$

Tenemos que $y''=0$ en $x=1/2$. Este punto junto con *x*=1 lo colocamos en la recta real para hacer el análisis de concavidad. Al tomar valores de prueba podemos completar el diagrama de concavidad.



El punto $(1/2, e^{-2})$ es un punto de inflexión de la gráfica.

4.**- Determinación de las asíntotas**.

Asíntota vertical: *x*=1 es candidato a asíntota vertical, Verifiquemos

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

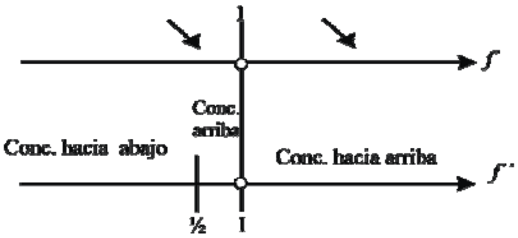
Así la gráfica de la función se acerca a la asíntota *x*=1 por el **lado derecho**.

Asíntota al infinito: Verificamos si tiene Asíntota horizontal planteando los límites**:**

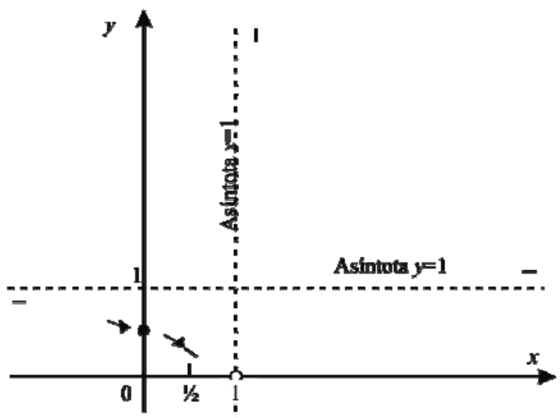
$$\lim_{x\to \infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$$

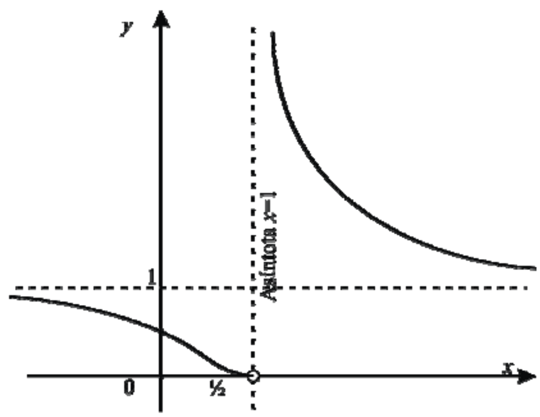
$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$$

Concluimos que y=1 es una asíntota por la izquierda y derecha de la función.



x	y
0	e^{-1}
1/2	e^{-2}





EJERCICIOS 3.10

1) Para cada una de las siguientes funciones determine el dominio. Rellene la información sobre cada una de las gráficas de las funciones. Represente los puntos de la tabla de valores en el plano. Si es extremo relativo, desplace las flechas que corresponda a monotonía antes y después del punto, si es punto de inflexión coloque una recta con la inclinación dada por la derivada en ese punto. En caso que exista asíntota de algún tipo, dibuje la gráfica en la zona donde se acerca a la asíntota o represente un trozo de asíntota. Por último grafique.

1.1) $y = x\sqrt{x+2}$; **1.2)** $y = xe^{-x}$; **1.3)** $y = \frac{e^x}{x}$;

1.4) $y = x - 2\ln(x+1)$; **1.5)** $y = 9\ln(x+1) - \ln(x)$; **1.6)** $y = \frac{x}{x^2-1} - x$;

2) Para las siguientes funciones determine: dominio intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad; extremos relativos, puntos de inflexión, asíntotas horizontales y verticales y aquellas intersecciones que puedan obtenerse convenientemente. Trace la gráfica

2.1) $y = \frac{4}{\sqrt{x+1}}$; **2.2)** $y = 2\sqrt{x} - x\sqrt{x}$; **2.3)** $y = \sqrt{1-x}(x+1)$;

2.4) $y = \sqrt[3]{x^2}(x+1)$; **2.5)** $y = xe^{x}$; **2.6)** $y = x\ln x^2 - 2x$;

2.7) $y = e^{-x}(1-x)$; **2.8)** $y = \sqrt{x+1}(x-1)$; **2.9)** $y = \ln x - \frac{x^2}{2}$;

2.10) $y = 5x^{2/3} + x^{5/3}$; **2.11)** $y = x^{1/3}(1+x)$

3) De acuerdo con cierto modelo logístico, la población mundial t años después de 1960 será aproximadamente

$P(t)=\dfrac{40}{1+12e^{-006t}}$. Trace la grafica.

4) Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuales falsas. Justifique.

4.1) ( ) Si f diferenciable entonces la gráfica de $y=\left(f(x)\right)^3$ es creciente.

4.2) ( ) Si una función diferenciable alcanza un máximo en un punto *c* interior de su dominio entonces $f'(c)=0$.

4.3) ( ) Si $f''(c)=0$ entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión.

4.4) ( ) Si $f'(c)=f''(c)=0$, entonces $f(c)$ no es ni máximo ni mínimo.

4.5) ( ) La suma de dos funciones crecientes es una función creciente.

4.6) ( ) El producto de dos funciones crecientes es creciente.

4.7) ( ) Si $f'(x)>0$ para todo *x* en (*a*,*b*), entonces el máximo de *f* está en *b*.

4.8) ( ) Si f tiene un valor máximo absoluto en *c* entonces $f'(c)=0$.

4.9) ( ) Si $f''(c)>0$ entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $y=f(x)$.

4.10) ( ) Sea f derivable y decreciente y $f(x)\neq 0$ para toda *x* entonces la gráfica de $y=\dfrac{1}{f(x)}$ es creciente.

4.11) ( ) Existe una función tal que $f(x)>0$, $f'(x)<0$ y $f''(x)>0$ para toda *x*.

4.12) ( ) Si $f(x)>0$ y derivable entonces los máximos relativos de *f* son los mismos máximos relativos de $\sqrt{f(x)}$.

4.13) ( ) Suponga *f* diferenciable en **R.** Si *f* tiene más de dos extremos relativos entonces no hay mínimos absolutos.

4.14) ( ) Si *f* tiene un máximo absoluto en *c* entonces la función *g* definida por $g(x)=-f(x)$ tiene un mínimo absoluto en *c*.

4.15) ( ) Si $f'(x)<0$ en el intervalo $(0,10)$ entonces $f(1)>f(8)$.

4.16) ( ) Una función diferenciable siempre alcanza un máximo absoluto en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$.

4.17) ( ) Suponga *f* diferenciable en **R.** Si *f* tiene exactamente un mínimo y un máximo relativo entonces no hay extremos absolutos en $(-\infty,\infty)$.

4.18) ( ) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ entonces la función no alcanza el mínimo absoluto.

5) Buscar una función definida en todo **R** cuya gráfica cumpla las condiciones dadas, la solución no es única.

5.1) Asíntota vertical *x*=-4; Mínimo absoluto en *x*=2.

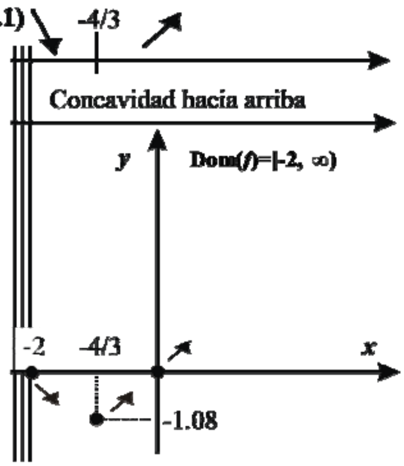
5.2) Asíntota oblicua $y=-x+1$, Mínimo relativo en *x*=2. Máximo relativo en *x*=5.

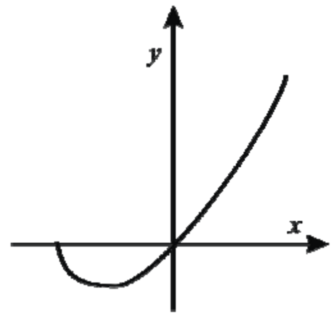
5.3) Asíntota horizontal solo por la izquierda y=2. Cóncava hacia abajo en R. No tiene extremos.

5.4) Asíntota oblicua $y=3x+6$, Máximo relativo en *x*=2. Asíntota vertical *x*=5. No hay más extremos relativos.

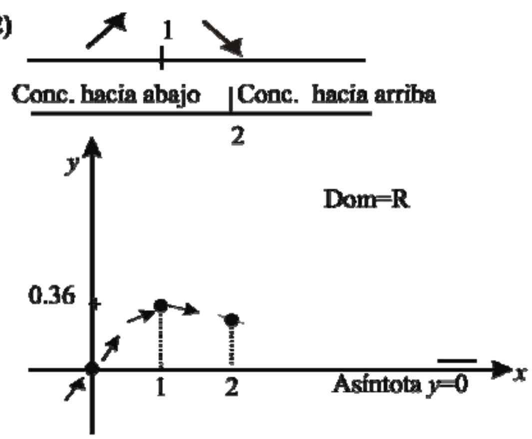
Respuestas:

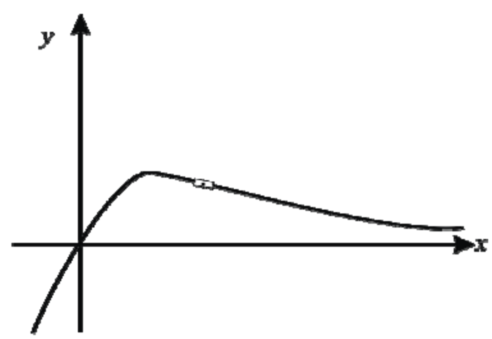
1.1)



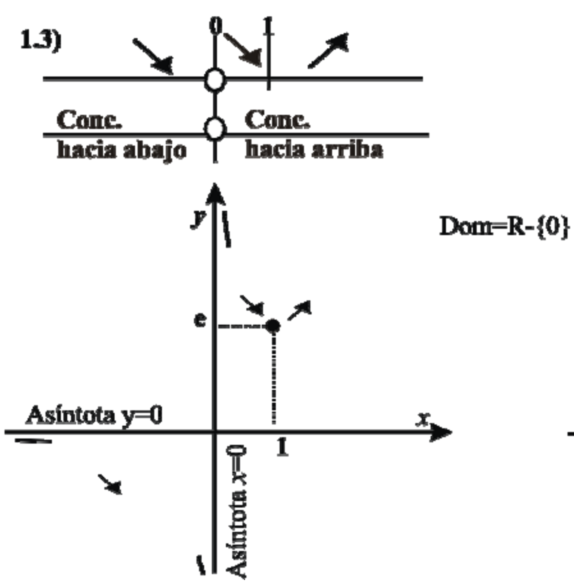


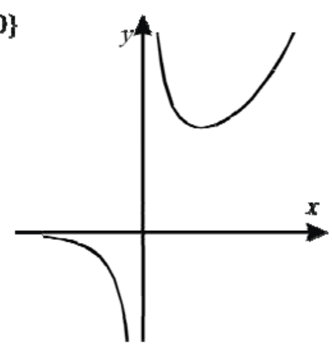
1.2)



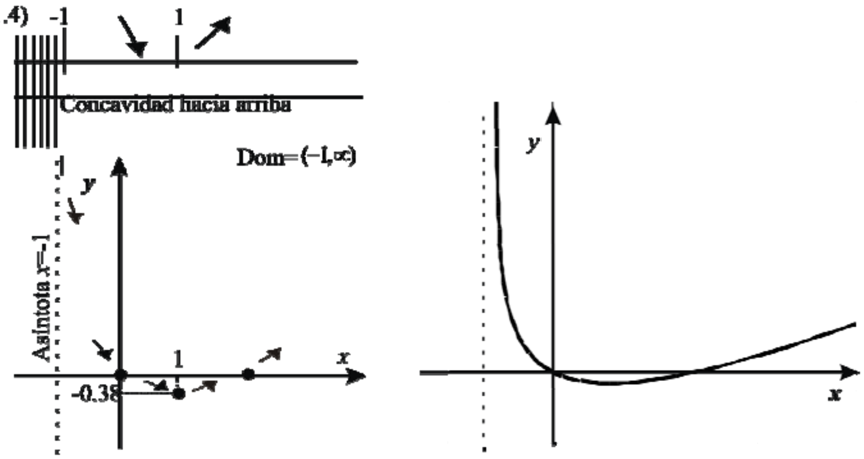


1.3)

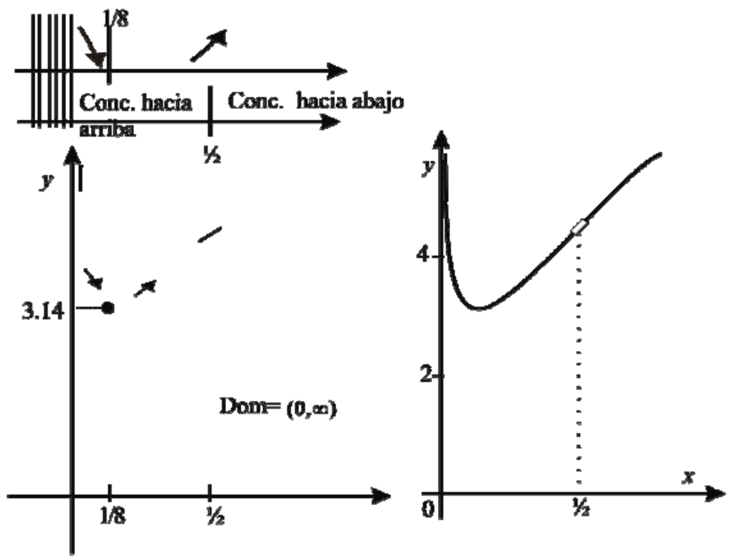




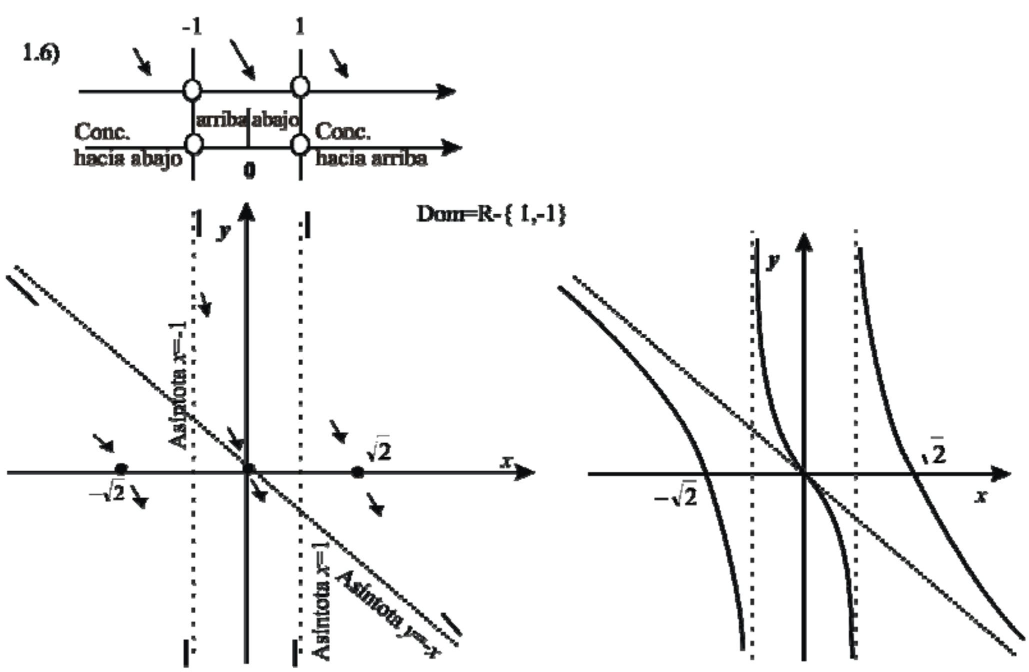
1.4)


-1
1
Concavidad hacia arriba
Dom=(−1,∞)
y
Asíntota x=-1
1
x
-0.38
y
x

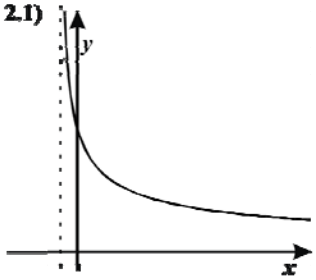
1.5)


1/8
Conc. hacia arriba
Conc. hacia abajo
½
y
3.14
Dom= (0,∞)
1/8
½
y
4
2
0
½
x

1.6)

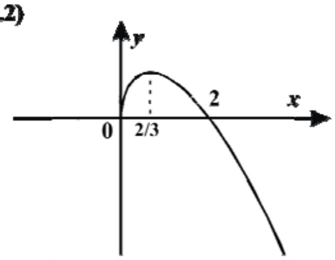

-1
1
Conc. hacia abajo
arriba
abajo
Conc. hacia arriba
0
Dom=R-{ 1,-1}
y
Asíntota x=-1
√2
x
−√2
Asíntota x=1
Asíntota y=-x
y
−√2
√2
x

2.1)



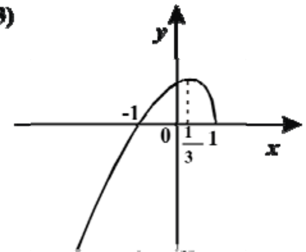
Dominio=$(-1,\infty)$
Decrece: $(-1,\infty)$
Conc. hacia arriba: $(-1,\infty)$
Corte con los ejes: (0,4)
Asíntota Horizontal $y=0$
Asíntota Vertical $x=-1$

2.2)



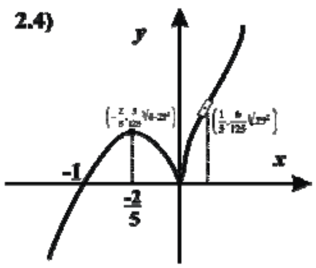
Dominio= $[0,\infty)$
Valor máximo relativo $4\sqrt{6}/9$ en $x=2/3$
Crece: $(0,2/3)$
Decrece: $(2/3,\infty)$
Concavidad hacia abajo: $(0,\infty)$
Cortes con los ejes: (0,0) y (2,0)

2.3)



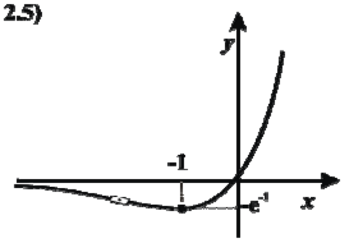
Dominio= $(-\infty,1]$
Máximo relativo $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ en $x=1/3$
Crece: $(-\infty,1/3)$
Decrece: $(1/3,1)$
Concavidad hacia abajo: $(-\infty,1)$
Cortes con el eje x: (1,0) y(-1,0)
Corte con el eje y: (0,1)

2.4)



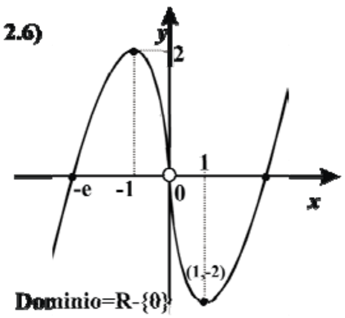
Dominio=R
Máximo relativo en x=-2/5
Valor mínimo relativo 0 en $x=0$
Crece: $(-\infty,-2/5)\cup(0,\infty)$
Decrece: (-2/5,0)
Cóncava hacia arriba: $(1/5,\infty)$
Cónc. hacia abajo: $(-\infty,0)\cup(0,1/5)$
Cortes con los ejes: (0,0 y (-1,0)).

2.5)



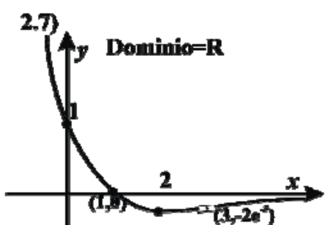
Dominio=R
Mínimo relativo $-e^{-1}$ en $x=-1$
Crece: $(-1,\infty)$
Decrece: $(-\infty,-1)$ $(-2,\infty)$
Concavidad hacia arriba:
Concavidad hacia abajo: $(-\infty,-2)$
Punto de inflexión en $x=-2$
Corte con los ejes: (0,0).
Asíntota Horizontal $y=0$ por la izquierda

2.6)



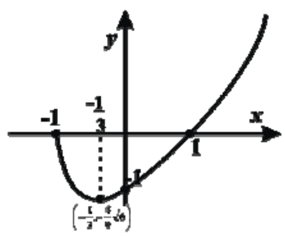
Dominio=R-{0}
Máximo relativo 2 en $x=-1$
Mínimo relativo -2 en $x=1$
Crece: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
Decrece: $(-1,0)\cup(0,1)$
Concavidad hacia arriba: $(0,\infty)$
Concavidad hacia abajo: $(-\infty,0)$
Cortes con el eje x: (-e,0) y (e,0)

2.7) **Dominio=R**



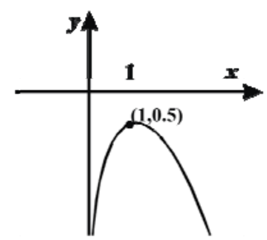
Mínimo relativo $-e^{-2}$ en $x=2$
Crece: $(2,\infty)$
Decrece: $(-\infty,2)$
Concavidad hacia arriba: $(-\infty,3)$
Concavidad hacia abajo: $(3,\infty)$
Punto de inflexión en $x=3$.
Cortes con los ejes (1,0) y (0,1)
Asíntota Horizontal por la derecha $y=0$

2.8) **Dominio= $[-1,\infty)$**



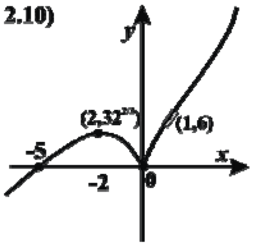
Mínimo relativo en $x=-1/3$
Crece: $(-1/3,\infty)$
Decrece: (-1,-1/3)
Cóncava hacia arriba: $(-1,\infty)$
Cortes con los ejes: (-1,0),(0,-1) y (1,0)

2.9)



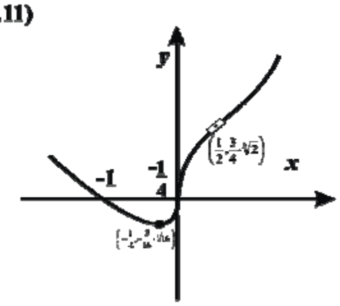
Dominio= $(0,\infty)$
Máximo relativo -1/2 en $x=1$
Crece: $(0,1)$
Decrece: $(1,\infty)$
Cóncava hacia abajo: $(0,\infty)$
No hay cortes con los ejes
Asíntota Vertical $x=0$

2.10)



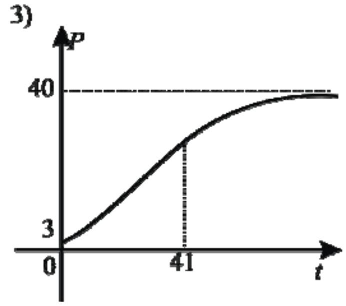
Dominio=R
Máximo relativo en x=-2
Crece: $(0,-2)\cup(0,\infty)$
Decrece: $(-2,0)$
Concavidad hacia arriba: $(1/2,\infty)$
Concavidad hacia abajo: $(-\infty,0)\cup(0,1/2)$
Cortes con los ejes: (-5,0) y(0,0)

2.11)



Dominio=R
Mínimo relativo en x=-1/4
Crece: $(-1/4,0)\cup(0,\infty)$
Decrece: $(-1/4,0)$
Cóncava hacia arriba: $(-\infty,0)\cup(1/2,\infty)$
Cóncava hacia abajo: (0,1/2)
Cortes con los ejes: (-1,0) y (0,0)

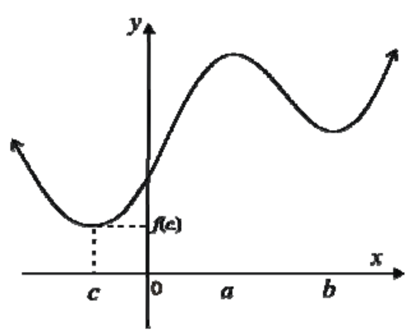
3)



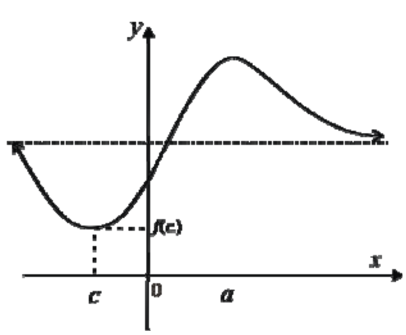
4.1) Falso. Si $f'(x)$ es positivo es cierto; **4.2**) Verdadero;
4.3) Falso. Si hay cambio de signo en la segunda derivada es verdadero;
4.4) Falso. Considere $f(x)=x^4$; **4.5)** Verdadero. Para funciones derivables vea el signo de la derivada de la suma; **4.6)** Falso. Considere $f(x)=x$ y $g(x)=x^5$; **4.7**) Falso. Si considera el intervalo (a,b] sería cierto; **4.8**) Falso. Puede ser que ni siquiera tenga derivada en el punto;
4.9) Falso. Tiene que haber cambio de signo en la segunda derivada; **4.10)** Verdadero. La derivada es $y=-(f'(x))(f(x))^{-2}$ es positiva; **4.11)** Verdadero. $f(x)=e^{-x}$.

4.12) Verdadero. Derive $\sqrt{f(x)}$, consiga los valores críticos y use la prueba de la primera derivada para concluir.

4.13) Falso. La figura del al lado tiene extremos relativos en a, b y c. Alcanza el mínimo absoluto en c.
4.14) Verdadera. $f(c)\geq f(x)$ para cualquier x. Si multiplicamos por ``-`` ambos lados de la desigualdad tenemos $-f(c)\leq -f(x)$, esto es $g(c)\leq g(x)$.
4.15) Verdadera. Como la derivada en negativa en el intervalo $(0,10)$, entonces la función es decreciente en este intervalo. Por definición de decrecimiento tenemos que $1<8$ implica $f(1)>f(8)$. Puede hacer también un gráfico de una función decreciente en $(0,10)$ y mostrar que el valor de la función en 1 es mayor que en 8.



4.16) Verdadera. Si una función es diferenciable entonces es continua. Sabemos que una función continua en un intervalo cerrado siempre alcanza ambos extremos absolutos.
4.17) Falso. La figura del al lado tiene extremos relativos en a y c. Alcanza el mínimo absoluto en c.



Resumen

Definición.- Sea c un punto en el dominio de f . Si $f'(c)=0$ o $f'(c)$ no está definida entonces c se denomina un número o **valor crítico** y $(c, f(c))$ **un punto crítico.**

Pasos para encontrar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$:
Paso 1.- Encontrar los valores críticos de f en $[a,b]$.
Paso 2.- Evaluar f en los valores críticos y en los extremos del intervalo: a y b.
Paso 3.- El valor evaluado más grande es el máximo y el menor el mínimo.

CRITERIO DE LA DERIVADA PARA EXTREMOS ABSOLUTOS.- Si en un intervalo cualquiera **hay un solo extremo relativo entonces él** necesariamente **es absoluto** en ese intervalo**.**

Pasos recomendados para clasificar puntos críticos de acuerdo al criterio de la primera derivada
1.- Colocar en la recta real todos los puntos críticos de la función, junto con los puntos donde la función es discontinua (estos últimos no son puntos críticos, pero si pueden ser puntos donde puede cambiar el signo de la primera derivada).
2.- Dentro de cada intervalo limitado por estos puntos escogemos valores de prueba que evaluamos en la primera derivada.
Si la primera derivada es positiva entonces la función es creciente en ese intervalo, anotamos $\nearrow$
Si es negativa entonces la función es decreciente en ese intervalo y anotamos $\searrow$
3.- Se concluye

a.- Si la función crece a la izquierda de un punto crítico c y luego decrece entonces en c se alcanza un máximo relativo de f.

b.- Si la función decrece a la izquierda de un punto crítico c y luego crece entonces en c se alcanza un mínimo relativo de f.

c.- Si no hay cambio de monotonía en c entonces c no es un extremo relativo de f.

Pasos recomendados para conseguir intervalos de concavidad.
Paso 1.- Determinar los x donde $f''(x)=0$ o $f''(x)$ no está definida (incluye los puntos donde la propia función no está definida).
Paso 2.- Colocar en la recta real los x donde $f''(x)=0$ o $f''(x)$ no está definida.
Paso 3.- Dentro de cada intervalo limitado por estos puntos escogemos valores de prueba que evaluamos en la segunda derivada.

- Si la segunda derivada es positiva en el valor de prueba entonces la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo.
- Si la segunda derivada es negativa en el valor de prueba entonces la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de f se llama **un punto de inflexión** si f es continua y cambia de concavidad en dicho punto.

Los puntos donde $f''(x)=0$ o donde la segunda derivada no está definida son candidatos a puntos de inflexión

Criterio de la segunda derivada.- Sea f una función tal que $f'(c)=0$ y con segunda derivada definida en c.

- Si $f''(c)<0$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f.
- Si $f''(c)>0$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f.