Cálculo de derivadas: Reglas de derivación

Sean a, b y k constantes (números reales) y consideremos u y v como funciones.

Derivada de una constante

$f(x)=k \qquad f'(x)=0$

Derivada de x

$f(x)=x \qquad f'(x)=1$

Derivada de la función lineal

$f(x)=ax+b \qquad f'(x)=a$

Derivada de una potencia

$f(x)=u^k \qquad f'(x)=k\cdot u^{k-1}\cdot u'$

Derivada de una raíz cuadrada

$f(x)=\sqrt{u} \qquad f'(x)=\dfrac{u'}{2\cdot\sqrt{u}}$

Derivada de una raíz de índice k

$f(x)=\sqrt[k]{u} \qquad f'(x)=\dfrac{u'}{k\cdot\sqrt[k]{u^{k-1}}}$

Ejemplos de derivadas

$f(x)=-2$

$f'(x)=0$

$f(x)=-5x$

$f'(x)=-5$

$f(x)=-\dfrac{7}{2}x-3$

$f'(x)=-\dfrac{7}{2}$

$f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3$

$f(x)=x^{-4}$

$f'(x)=-4x^{-5}=-\dfrac{4}{x^5}$

$$f(x)=\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$f'(x)=3\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2$$

$$f(x)=\sqrt{5x+2}$$

$$f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$$

$$f(x)=\sqrt[4]{2x-4}$$

$$f'(x)=\frac{2}{4\sqrt[4]{(2x-4)^3}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

Operaciones con derivadas

Derivada de una suma

$f(x)=u\pm v$ $\qquad$ $f'(x)=u'\pm v'$

Derivada de una constante por una función

$f(x)=k\cdot u$ $\qquad$ $f'(x)=k\cdot u'$

Derivada de un producto

$f(x)=u\cdot v$ $\qquad$ $f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$

Derivada de una constante partida por una función

$f(x)=\dfrac{k}{v}$ $\qquad$ $f'(x)=\dfrac{-k\cdot v'}{v^2}$

Derivada de un cociente

$f(x)=\dfrac{u}{v}$ $\qquad$ $f'(x)=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

Ejemplos de derivadas con operaciones de funciones

$$f(x)=-2x^2$$

$$f'(x)=-4x$$

$$f(x) = -2x^2 - 5x + 2$$

$$f'(x) = -4x - 5$$

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x + 2$$

$$f'(x) = 9x^2 - 4x^2 - 5$$

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 4x - 5$$

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + 3x\right)$$

$$f'(x) = 2x\left(x^3 + 3x\right) + \left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 + 3\right)$$

$$f(x) = \frac{3\left(x^2 + 2\right)^3}{5} = \frac{3}{5}\left(x^2 + 2\right)^3$$

$$f'(x) = \frac{3}{5} \cdot 3\left(x^2 + 2\right)^2 \cdot 2x = \frac{18}{5}x\left(x^2 + 2\right)^2$$

$$f(x) = \frac{3x^3 + x + 2}{5x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{\left(9x^2 + 1\right)\left(5x^2 + 1\right) - \left(3x^3 + x + 2\right)(10x)}{\left(5x^2 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{15x^4 + 4x^2 - 20x + 1}{\left(5x^2 + 1\right)^2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x - 1}}(x + 1) - \sqrt{x - 1}}{(x + 1)^2} = \frac{x + 1 - 2(x - 1)}{2(x + 1)^2\sqrt{x - 1}}$$

$$= \frac{-x + 3}{2(x + 1)^2\sqrt{x - 1}}$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}=-\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Derivadas exponenciales

Derivada de la función exponencial

$$f(x)=a^u \qquad f'(x)=u'\cdot a^u\cdot\ln a$$

Derivada de la función exponencial de base e

$$f(x)=e^u \qquad f'(x)=u'\cdot e^u$$

Ejemplos de derivadas exponenciales

$$f(x)=2^{x^2-1}$$

$$f'(x)=2x\cdot 2^{x^2-1}\cdot\ln 2$$

$$f(x)=3^{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}3^{\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln 3=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}3^{\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln 3$$

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x)=x^3\cdot e^{-3x}$$

$$f'(x)=3x^2\cdot e^{-3x}+x^3\cdot(-3)\cdot e^{-3x}=3x^2\cdot e^{-3x}(1-x)$$

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot e^{2x}\cdot\sqrt{x}-e^{2x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{4xe^{2x}-e^{2x}}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{4xe^{2x}-e^{2x}}{2x\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{e^{2x}(4x-1)}{2x\sqrt{x}}$$

Derivación de logaritmos

Derivada de un logaritmo

$$f(x)=\log_a u \qquad f'(x)=\frac{u'}{u}\cdot\log_a e$$

Como $\log_a e=\frac{\ln e}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$, también se puede expresar así:

$$f(x)=\log_a u \qquad f'(x)=\frac{u'}{u}\cdot\frac{1}{\ln a}$$

Derivada de un logaritmo neperiano

$$f(x)=\ln u \qquad f'(x)=\frac{u'}{u}$$

Ejemplos de derivadas logarítmicas

$$f(x)=\log_2\left(x^4-3x\right)$$

$$f(x)=\frac{4x^3-3}{\left(x^4-3x\right)}\cdot\log_2 e$$

$$f(x)=\sqrt[3]{\log_4 3x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(\log_4 3x)^2}}\cdot\frac{3}{3x}\cdot\log_4=\frac{\log_4 e}{3x\sqrt[3]{(\log_4 3x)^2}}$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$f(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=\frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)}=\frac{-2}{1-x^2}$$

$$f(x)=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$f(x)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\left[\log(1+x)-\log(1-x)\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\cdot\log e+\frac{1}{1-x}\cdot\log e\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\log e=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x+1+x}{1-x^2}\right)\log e=\frac{1}{1-x^2}\cdot\log e$$

$$f(x)=x^5\cdot\ln x$$

$$f'(x)=5x^4\cdot\ln x+x^5\cdot\frac{1}{x}=5x^4\cdot\ln x+x^4=x^4(5\ln x+1)$$

$$f(x)=\ln^5 3x=(\ln 3x)^5$$

$$f'(x)=5\cdot(\ln 3x)^4\cdot\frac{3}{3x}=\frac{5}{x}\cdot\ln^4 3x$$

Derivadas trigonométricas

Derivada del seno

$f(x)=sen\,u$ $\qquad$ $f'(x)=u'\cdot\cos u$

Derivada del coseno

$f(x)=\cos u$ $\qquad$ $f'(x)=-u'\cdot sen\,u$

Derivada de la tangente

$f(x)=tg\ u$ $\qquad$ $f'(x)=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'\cdot\sec^2 u=u'\cdot(1+tg^2 u)$

Derivada de la cotangente

$f(x)=\cot g\ u$ $\qquad$ $f'(x)=-\dfrac{u'}{sen^2 u}=u'\cdot co\sec^2 u=-u'\cdot(1+cotg^2 u)$

Derivada de la secante

$f(x)=\sec u$ $\qquad$ $f'(x)=\dfrac{u'\cdot sen u}{\cos^2 u}=u'\cdot\sec u\cdot tg\,u$

Derivada de la cosecante

$f(x)=cosec\ u$ $\qquad$ $f'(x)=-\dfrac{u'\cdot\cos u}{sen^2 u}=-u'\cdot cosec u\cdot cotg u$

Ejemplos de derivadas trigonométricas

$$f(x)=sen\ 4x$$

$$f'(x)=4\cos 4x$$

$$f(x)=sen\ x^4$$

$$f'(x)=4x^3\cos x^4$$

$$f(x)=sen^4\ x=(sen\,x)^4$$

$$f'(x) = 4\,sen^3\ x\ \ \cos x$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{5}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{5}\,sen\,x$$

$$f(x) = \cos\left(3x^2 + x - 1\right)$$

$$f'(x) = -(6x+4)\,sen\left(3x^2 + x - 1\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos^2 5x = \frac{1}{2}(\cos 5x)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 5x \cdot (-sen\,5x) \cdot 5 = -5\cos 5x \cdot sen\,5x$$

$$f(x) = tg\,\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \operatorname{cotg} 4x^2$$

$$f'(x) = -\frac{8x}{\operatorname{sen}^2 4x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{cotg}^2 4X = (\operatorname{cotg} 4X)^2$$

$$f'(x) = -\frac{2 \cdot 4 \cdot \operatorname{cotg} 4X}{\operatorname{sen}^2 4x^2} = -\frac{8 \cdot \operatorname{cotg} 4X}{\operatorname{sen}^2 4x^2}$$

$$f(x) = \sec 5x$$

$$f'(x) = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 5x}{\cos^2 5x}$$

$$f(x) = \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Derivadas trigonométricas inversas

Derivada del arcoseno

$$f(x) = arc\ sen\, u \qquad f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Derivada del arcocoseno

$$f(x) = arc\ cos\, u \qquad f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Derivada del arcotangente

$$f(x) = arc\ tg\ u \qquad f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$$

Derivada del arcocotangente

$$f(x) = arc\ cotg\ u \qquad f'(x) = -\frac{u'}{1+u^2}$$

Derivada del arcosecante

$$f(x) = arc\ sec\, u \qquad f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$$

Derivada del arcocosecante

$$f(x) = arc\ cosec\, u \qquad f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$$

Ejemplos de derivadas trigonométricas inversas

$$f(x) = arc\ sen\,(2x-3)$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$$

$$f(x) = arc\ tg\ 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{6x}{1+9x^4}$$

$$f(x) = arc\ cos\ x^2$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Derivada de la función compuesta: Regla de la cadena

$$(g\circ f)'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)$$

Ejemplos de derivadas compuestas

$$f(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2-1}\right)^3$$

$$f'(x)=3\left(\frac{x^2-1}{x^2-1}\right)^2\frac{2x\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=3\left(\frac{x^2-1}{x^2-1}\right)^2\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f(x)=\cos 3^x$$

$$f'(x)=-3^x\ \ln 3\ \ sen\, 3^x$$

$$f(x)=tg\,(\ln x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(\ln x)}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{1}{x\cos^2(\ln x)}=\frac{1}{x}\sec^2(\ln x)=\frac{1}{x}\left(1+tg^2\ln x\right)$$

$$f(x)=\text{sen}\ (\text{sen}\, x)$$

$$f'(x)=\cos(\text{sen}\ x)\cdot\cos x$$

$$f(x)=\text{sen}\ \sqrt{\ln(1-3x)}$$

$$f'(x)=\cos\ \sqrt{\ln(1-3x)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln(1-3x)}}\cdot\frac{1}{(1-3x)}\cdot(-3)$$

$$f(x)=arc\ cotg\,(\ln x)$$

$$f'(x)=-\frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$$

Derivada de la función inversa

Si f y g son funciones inversas, es decir $g \circ f = f \circ g = I$. Entonces

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

Ejemplos:

Derivar, usando la derivada de la función inversa: y = arc sen x

$$x = \operatorname{sen} y$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Derivar, usando la derivada de la función inversa: y = arc tg x

$$x = tg\ y$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1 + tg^2\ y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Derivada de la función potencial-exponencial

Estas funciones son del tipo:

$$f(x) = u^v \qquad u > 0$$

Para derivarla se puede utilizar esta fórmula:

$$f(x) = u^v \qquad f'(x) = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \cdot \ln u$$

O bien tomamos logaritmos y derivamos:

$$y = u^v$$

$$\ln y = \ln u^v$$

$$\ln y = v \cdot \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$$

$$y' = \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \cdot y$$

Ejemplos:

Derivar tomando logaritmos:

$$f(x)=x^{\operatorname{sen} x} \qquad y=x^{\operatorname{sen} x}$$

$$\ln y=\ln x^{\operatorname{sen} x} \qquad \ln y=\operatorname{sen} x \ \ln x$$

$$\frac{y'}{y}=\cos x \ln x+\operatorname{sen} x \frac{1}{x}$$

$$y'=\left(\cos x \ln x+\frac{1}{x}\operatorname{sen} x\right)x^{\operatorname{sen} x}$$

Derivadas sucesivas

Si derivamos la derivada de una función, **derivada primera**, obtenemos una nueva función que se llama d**erivada segunda, f''(x)**.

Si volvemos a derivar obtenemos la **derivada tercera, f'''(x)**.

Si derivamos otra vez obtenemos la **cuarta derivada f'^{V}** y así sucesivamente.

Ejemplos:

Calcula las derivadas 1ª, 2ª, 3ª y 4ª de:

$$f(x)=2x^3-15x^2+36x-12$$

$$f'(x)=6x^2-30x+36$$

$$f''(x)=12x-30$$

$$f'''(x)=12$$

$$f^{IV}(x)=0$$

Derivada enésima

En algunos casos, podemos encontrar una fórmula general para cualquiera de las derivadas sucesivas (y para todas ellas). Esta fórmula recibe el nombre de **derivada enésima, f'^{n}(x)**.

Ejemplo:

Calcula la derivada enésima de:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2}{x^3}=\frac{2!}{x^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}$$

$$\ldots$$

$$f'^{n}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Derivación implícita

Funciones implícitas

Una función está definida en forma implícita cuando **no aparece despejada la y** sino que **la relación entre x e y viene dada por una ecuación de dos incógnitas cuyo segundo miembro es cero**.

Derivadas de funciones implícitas

Para hallar la derivada en forma implícita no **es necesario despejar y**. Basta **derivar miembro a miembro**, utilizando las reglas vistas hasta ahora y teniendo presente que:

x'=1.

En general y'≠1.

Por lo que omitiremos x' y dejaremos y'.

Ejemplos

$$6x - 2y = 0$$

$$6 - 2y' = 0 \qquad y' = 3$$

$$x^2 + y^2 - 7 = 0$$

$$2x + 2yy' = 0 \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

Cuando las funciones son más complejas vamos a utilizar una regla para facilitar el cálculo:

$$y' = \frac{-F'_x}{F'_y}$$

Ejemplo:

$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 y = 0$$

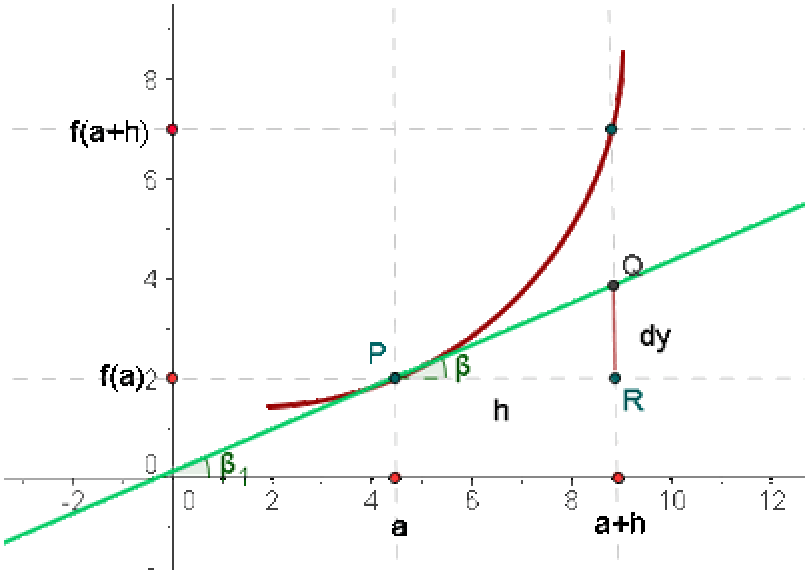
$$y' = \frac{-2\sec x\ \sec x\ tgx}{-2\operatorname{cosec} y\ \operatorname{cosec} y\ \cot g y} = \frac{\sec^2 x\ tgx}{\operatorname{cosec}^2 y\ \cot g y}$$

Diferencial de una función

Sea f(x) una función derivable. La **Diferencial de una función correspondiente al incremento h de la variable independiente, es el producto f'(x) · h. Se representa por dy**.

$$dy = f'(x) \cdot h$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$



$$f'(x) = tg\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{QR}{h}$$

La diferencial en un punto representa el incremento de la ordenada de la tangente, correspondiente a un incremento de la variable.

Ejemplos:

Calcular la diferencial de las funciones:

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 6$$

$$df(x) = (6x + 5)dx$$

$$f(x) = e^{tgx}$$

$$df(x) = (1 + tg^2 x) \cdot e^{tgx}\, dx$$

Ejemplo:

Calcular el incremento del área del cuadrado de 2 m de lado, cuando aumentamos 1mm su lado.

$S = x^2$ $dS = 2x\ dx$

d(S)= 2·2· 0.001 = **0.004 m^2**