INSTITUCIÓN EDUCATIVA GABRIEL TRUJILLO

CORREGIMIENTO DE CAIMALITO, PEREIRA

Algebra

πLosos

CASOS DE FACTORIZACIÓN

El futuro tiene muchos nombres. Para los débiles es lo inalcanzable. Para los temerosos, lo desconocido. Para los valientes es la oportunidad.

Víctor Hugo

1. Factorización por factor común.
   - Factor común de un binomio.
   - Factor común de un polinomio.
   - Factor común por agrupación de términos.
2. Factorización de binomios.
   - Diferencia de cuadrados perfectos.
   - Suma o diferencia de cubos perfectos.
   - Suma o diferencia de potencias de igual exponente.
3. Factorización de trinomios
   - Trinomio cuadrado perfecto.
   - Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción.
   - Trinomio de la forma **$x^{2n} + bx^n + c$.**
   - Trinomio de la forma **$ax^{2n} + bx^n + c$.**
4. Factorización de un cubo perfecto
5. Factorización completa

FACTOR COMÚN MONOMIO

Recordar Los coeficientes numéricos se factorizan usando los números primos en el orden siguiente: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc.

Ejemplos

$$\frac{2}{5}x^5 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{14}{15}x^2 = \frac{2}{5}x^2\left(x^3 - 3x^2 + \frac{7}{3}\right)$$

ACTIVIDAD DE EJERCITACIÓN

1. $am^2 - an^2 + a^2mn =$
2. $2a^2b + 4ab^2 + 10a^3b^3 =$
3. $m^2n^2 + mn^2 - 2m^2n =$
4. $14acd - 7cd + 21c^2d^2 =$
5. $3a^3 + 6a^2 + 9a =$
6. $8q^4t + 2q^3t^2 - 6q^2t^4 =$
7. $5x^2y^2 + 15xy + 20xyz =$
8. $17m^3n^3 - 51m^2n^2 + 85mn =$

9. $12m^3n^3 - 18m^2n^2 - 24m^4n^4 =$

10. $x^4 + x^3 - x^2 + x =$

11. $93a^3x^2y - 62a^2x^3y^2 - 124a^2x =$

12. $x - x^2 + x^3 - x^4 =$

13. $25x^2 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^7 =$

14. $9a^2b^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3 =$

15. $16x^3y^2 - 8x^2y - 24x^4y^2 - 40x^2y^3 =$

16. $12m^2n+24m^3n^2 -36m^4n^3 +48m^5n^4 =$

17. $100a^2b^3c - 150ab^2c^2 + 50ab^3c^3 - 200abc^2 =$

18. $a^2 - 2a^3 + 3a^4 - a^5 + 6a^6 =$

19. $3a^2b + 6ab - 5a^3b^2 + 8a^2bx + 4ab^2m$

20. $15abc^2 + 45a^2bc =$

FACTOR COMÚN POLINOMIO

Recordar Las siguientes equivalencias son útiles para resolver algunos de estos ejercicios:

$$(b - a) = - (a - b) \qquad - a - b = - (a + b) \qquad - a + b = - (a - b)$$

La práctica hace al maestro, así que, a resolver los siguientes ejercicios se dijo:

ACTIVIDAD DE EJERCITACIÓN

1. $x(a + b) + y(a + b) =$
2. $3x^2(m + n) - 2y^3(m + n) =$
3. $a(n + 2) + n + 2 =$
4. $a^2 + 1 - b(a^2 + 1) =$
5. $- m - n + x(m + n) =$
6. $a^3(a - b + 1) - b^2(a - b + 1) =$
7. $x(2a + b + c) - 2a - b – c =$
8. $(x + 1)(x - 2) + 3y(x - 2) =$
9. $a(x - 1) - (a + 2)(x - 1) =$
10. $(a + b - 1)(a^2 + 1) - a^2 – 1=$
11. $3x(x - 1) - 2y(x - 1) + z(x - 1) =$
12. $a(n + 1) - b(n + 1) - n – 1 =$
13. $x(a + 2) - a - 2 + 3(a + 2) =$
14. $a^2b^2(p + q) - 4ab^4(p + q) - (p + q) =$
15. $(1+3a)(x+1) - 2a(x+1) + 3(x+1) =$

16. $(3x+2)(x-2) - (3x+2) - x(3x+2) =$

FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS.

Recordar Los siguientes resultados: $(a + b) = (b + a)$ y $(b - a) \neq (a - b)$

Resolver cada ejercicio utilizando agrupación de términos

ACTIVIDAD DE EJERCITACIÓN

1. $xm + ym + xn + yn =$
2. $x^2 + xy + ax + ay =$
3. $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2 =$
4. $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4 =$
5. $2y^4 - y^3 + 4y – 2 =$
6. $p^3q^3 - p^2q^2 - pq + 1 =$
7. $x^2 + mxy - 4xy - 4my^2 =$
8. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2 =$
9. $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax =$
10. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx =$
11. $20ax - 5bx - 2by + 8ay =$
12. $2am - 2an + 2a - m + n – 1 =$
13. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b =$
14. $a^3 + a + a^2 + 1 + x^2 + a^2x^2 =$
15. $3a^3 - 3a^2b + 9ab^2 - a^2 + ab - 3b^2 =$
16. $2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz^2 - 3ny^2 + 6xy^2 =$
17. $3x^3 + 2axy + 2ay^2 - 3xy^2 - 2ax^2 - 3x^2y$
18. $a^2b^3 - n^4 + a^2b^3x^2 - n^4x^2 - 3a^2b^3x + 3n^4x =$

FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS

FACTORIZACIÓN POR DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS.

Recordar Se usa la fórmula notable: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ de izquierda a derecha.

Hay ejercicios en que se aplica más de una vez la diferencia de cuadrados y en algunos ejercicios hay que ordenar primero el binomio.

EJERCICIOS DE APROPIACIÓN.

FACTORIZAR CADA BINOMIO.

1. $m^2 - n^2 =$
2. $a^2 - 9 =$
3. $16 - b^2 =$
4. $121x^2 - 64m^2 =$
5. $x^4 - 169 =$
6. $a^8 - 1 =$
7. $x^4 - m^8 =$
8. $49a^4b^4 - 16c^4 =$
9. $36a^8 - 100b^{18} =$
10. $225a^2 - 144b^2 =$
11. $-81 + 9a^{10} =$
12. $-49b^{12} + a^{10} =$
13. $25x^2y^4 – 121=$
14. $-169y^6 + 100m^2n^4 =$
15. $1 - 9a^2b^4c^6d^8 =$
16. $\boldsymbol{\frac{w^2}{36} - \frac{d^6}{25}}$
17. $\frac{1}{64} - w^8$

SUMAS Y RESTAS DE CUBOS PERFECTOS.

Recordar Se utilizan los productos notables:

$$a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$$

ACTIVIDAD DE EJERCITACIÓN

1. Factorizar cada diferencia o suma de cubos.

a. $x^3 + 1 =$

b. $x^3 - 8 =$

c. $27x^3 + 64 =$

d. $1 - c^3 =$

e. $m^3 - n^3 =$

f. $x^6 - b^6 =$

g. $8a^3 + 27b^6 =$

h. $64a^3 - 729 =$

i. $512 + 27x^9 =$

j. $x^3 - 125a^6 =$

k. $a^6 + 125b^{12} =$

l. $8x^9 - 125y^6z^9 =$

m. $27m^6 + 343n^9 =$

n. $216 - x^{12} =$

o. $1 - 27a^3b^3 =$

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Un trinomio ordenado respecto a una de sus variables es cuadrado perfecto cuando:

- ✓ El primer y el tercer término son cuadrados perfectos, es decir, tienen raíz cuadrada exacta.
- ✓ El segundo término es el doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer término.

Recordar Se usa los productos notables:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Se factoriza de izquierda a derecha. En algunos casos hay que ordenar primero el trinomio.

ACTIVIDAD DE EJERCITACIÓN

1. Qué le falta a cada expresión para ser un trinomio cuadrado perfecto?
   a. $x^2 + 4ax + [\quad]$
   b. $[\quad] - 70pq + 25q^2$
   c. $\frac{9}{49}t^2 - \frac{12}{35}tw + [\quad]$

2. Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfectos, en algunos casos se debe ordenar el trinomio antes de factorizarlo.

a. $14x^2y + 49x^4y^2 + 1 =$

b. $x^4 - 4x^2 + 4 =$

c. $49x^4y^2 + 14x^2y + 1$

d. $16x^2 + 8x + 1$

e. $y^2 + 10y + 25$

f. $-24y + 4y^2 + 36 =$

g. $49x^2 + 112x + 64 =$

h. $81y^2 - 180y + 100 =$

i. $25x^2 + 30xy + 9y^2$

j. $a^2 - 6ab^2 + 9b^4 =$

k. $m^2 + 64 - 16m =$

l. $4a^2 - 8ab + 4b^2 =$

m. $16 + 40x^2 + 25x^4 =$

n. $-2a^3b^3 + a^6 + b^6 =$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO POR ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.

Existen algunos trinomios en los cuales su segundo término no es el doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer término del polinomio.

Para lograr que un trinomio con estas características se convierta en un trinomio cuadrado perfecto, basta con sumar y restar un mismo término (semejante al segundo) de tal forma que el segundo término cumpla con la condición del trinomio cuadrado perfecto. A este proceso se le denomina completar cuadrado.

$$x^2+xy+y^2=x^2+xy+y^2+(xy-xy)=x^2+2xy+y^2-xy=(x+y)^2-xy$$

TRINOMIO DE LA FORMA $x^{2n} + bx^n + c$.

Se identifica por tener tres términos, hay una literal con exponente al cuadrado y uno de ellos es el término independiente. Se resuelve por medio de dos paréntesis, en los cuales se colocan la raíz cuadrada de la variable, buscando dos números que multiplicados den como resultado el término independiente y sumados (pudiendo ser números negativos) den como resultado el término del medio.

Ejemplo 1: $a^2+2a-15=(a+5)(a-3)$

Ejemplo 2: $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

ACTIVIDAD DE EJERCITACIÓN

1. Realizar la factorización de cada trinomio.

a. $x^2 + 4x + 3 =$

b. $x^2 + 3x - 10 =$

c. $x^2 - 2x - 8 =$

d. $x^2 - x - 12 =$

e. $x^2 + 7x + 6 =$

f. $x^2 - 2x - 24 =$

g. $x^2 - 9x + 8 =$

h. $x^2 - 4x - 21 =$

i. $x^2 - 7x + 12 =$

j. $x^2 - 4x + 3 =$

k. $x^6 - 6x^3 - 7 =$

l. $x^4 - 8x^2 + 15 =$

m. $a^6 - 7a^3 + 10 =$

TRINOMIO DE LA FORMA $ax^{2n} + bx^{n} + c$.

En este caso se tienen 3 términos: El primer término tiene un coeficiente distinto de uno, la letra del segundo término tiene la mitad del exponente del término anterior y el tercer término es un término independiente, o sea sin una parte literal, así:

$$4x^2 + 12x + 9$$

Para factorizar una expresión de esta forma, se multiplica el término independiente por el coeficiente del primer término($4x^2$) :

$$4x^2 + 12x + (9 \cdot 4)$$

$$4x^2 + 12x + 36$$

Luego debemos encontrar dos números que multiplicados entre sí den como resultado el término independiente y que su suma sea igual al coeficiente del término x :

$$6 \cdot 6 = 36$$

$$6 + 6 = 12$$

Después procedemos a colocar de forma completa el término x^2 sin ser elevado al cuadrado en paréntesis, además colocamos los 2 términos descubiertos anteriormente :

$$(4x + 6)(4x + 6)$$

Para terminar dividimos estos términos por el coeficiente del término x^2 :

$$\frac{(4x+6)(4x+6)}{4} = \frac{(4x+6)}{2} \cdot \frac{(4x+6)}{2}$$

Queda así terminada la factorización:

$$(2x + 3)(2x + 3) = (2x + 3)^2$$

ACTIVIDAD DE EJERCITACIÓN

Factorizar los trinomios utilizando este caso especial.

a. $9x^2 + 37x + 4 =$

b. $4n^2 + n - 33 =$

c. $6x^4 + 5x^2 – 6 =$

d. $5x^6 + 4x^3 – 12=$

e. $16x^8 - 17x^4 + 1 =$

f. $7y^6 - 33y^3 – 10=$

g. $20n^2 + 44n – 15 =$

h. $14m^2 - 31m - 10 =$

FACTORIZACIÓN DE UN CUBO PERFECTO

La raíz cubica de un monomio se obtiene extrayendo la raíz cubica de su coeficiente y dividiendo por 3 el exponente de cada letra.

El cubo de un binomio debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Se ordena la expresión.
2. Tener cuatro términos
3. Que el primero y último término sean cubos perfecto.
4. Que el segundo término sea (+) o (-) el triplo del cuadrado de la raíz cubica del primer término multiplicado por la raíz cubica del último término.
5. Que el tercer término sea más el triplo de la raíz cubica del término del primer término por el cuadrado de la raíz cubica del último término.
6. Si todos los términos son positivos la expresión dada es un cubo suma, si los signos están alternados + - + -, la expresión dada es el cubo de la diferencia.

Factorización .Se extrae la raíz cubica del primer término +,- la raíz cubica del último término y se eleva al cubo.

Así:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$8a^3 + 12a^2 + 6a + 1 = (2a + 1)^3$$

ACTIVIDAD DE EJERCITACIÓN

Realizar el ejercicio 102 del Algebra de Baldor utilizando el cubo perfecto.

FACTORIZACIÓN COMPLETA

TAREA

Realizar el ejercicio 106 del Algebra de Baldor (miscelánea)

Diego Alonso Castaño Álzate.

Docente del área de matemáticas