



Área. Matemáticas: **Grados:** 11-00

Asignatura: cálculo y estadística

Docente: Santiago Vásquez Artunduaga

Proyecto de aula o de investigación: Salud y Bienestar

Contenidos, temas: Analisis funcional, conceptos de muestreo y probabilidad condicional

- Producto cartesiano
- Relaciones, definición, dominio, rango y gráfica
- Concepto de función
- Domini, rango y grafica
- Tipos de funciones
- Funciones especiales
- Conceptos de muestreo: Poblacion, muestra, parámetro y estadistico

Competencias por desarrollar:

- Modela situaciones haciendo uso de funciones definidas a trozos.
- Analiza algebraicamente funciones racionales y encuentra su dominio y sus asíntotas
- Reconoce las propiedades básicas que diferencian las familias de funciones exponenciales, lineales, logarítmicas, polinómicas, etc. e identifica cuáles puede utilizar para modelar situaciones específicas.
- Utiliza nociones básicas relacionadas con el manejo y recolección de información como población, muestra y muestreo aleatorio.
- Conoce el significado de la probabilidad condicional y su relación con la probabilidad de la intersección:

A. PRECONCEPTOS

- Numeros reales e Intervalos
- Operación entre conjuntos
- Ecuaciones e inecuaciones
- Operaciones básicas entre conjuntos, relaciones entre conjuntos y elementos
- Concepto de probabilidad y tipos de eventos

SEGUNDO PERIODO		ACTIVIDAD A DESARROLLAR DE LA GUÍA
SEMANA 1	Leer y analizar paginas 1,3 y 4	
SEMANA 2	Reconstruir ejemplos 1, 2 y 3 de las páginas 5, 6 y 7, e ingrese a los link de SOPORTE ONLINE (OPCIONAL)*	
SEMANA 3	Desarrollar Taller D1 pagina 19 e interactuar en sección C. Practiquemos link 1, 2 y 3 página 17	
SEMANA 4	Enviara taller D1 al correo: gjeao.wordpress.com ASUNTO: GRADO - APELLIDOS (dos) - TALLER D1	
SEMANA 5	Leer y analizar paginas 8 a la 11, reconstruir los jemplos 4 y 5, Desarrolla Taller D2 de las páginas 19 y 20	
SEMANA 6	Enviara taller D2 al correo: gjeao.wordpress.com ASUNTO: GRADO - APELLIDOS (dos) - TALLER D2	
SEMANA 7	Leer y analizar paginas 11 a la 14 e ingresar e interactuar en sección C, Practiquemos link 4 al 10. y accede a los link de SOPORTE ONLINE(OPCIONAL)	
SEMANA 8	Desarrollar Taller D3 paginas 22 y 23 e interactuar en sección C. Practiquemos link 1, 2 y 3 página 17 e interactua en la sección practiquemos + pagina 24, link 3	
SEMANA 9	Enviara taller D3 al correo: gjeao.wordpress.com ASUNTO: GRADO - APELLIDOS (dos) - TALLER D3 + AE, enviar tambien formato de autoevaluacion 2do periodo	
SEMANA 10	Retroalimentación	

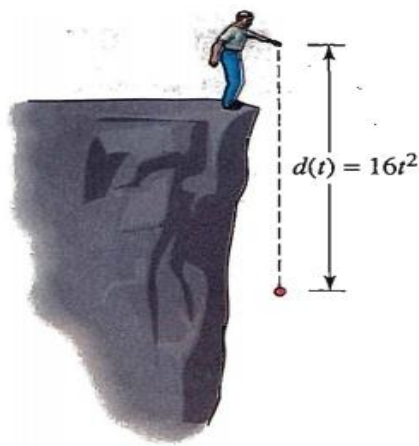
B. FUNDAMENTACION

B.1. LECTURA INTRODUCCIÓN

Quizá la idea matemática más útil para modelar el mundo real es el concepto de función, que se estudia en este capítulo. Para entender qué es una función, veremos un ejemplo. Si un escalador de rocas deja caer una piedra desde un acantilado alto, ¿qué sucede con la piedra? Por supuesto la piedra cae; qué tanto ha caído en determinado momento depende del tiempo que ha estado descendiendo. Ésta es una descripción general, pero no indica de manera exacta cuándo la piedra choca con el suelo.



Descripción general: la piedra cae.

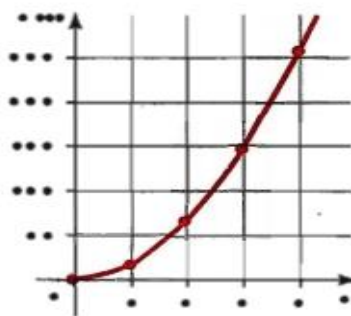


Función: en t segundos la piedra cae $16t^2$ pies.

Lo que necesitamos es una regla que relacione la posición de la piedra con el tiempo que ésta ha descendido. Los físicos saben que la regla es: en t segundos la piedra cae $16t^2$ pies. Si $d(t)$ representa la distancia que ha descendido la piedra en el instante t , entonces esta regla se puede expresar como:
 $d(t) = 16t^2$.

Esta "regla" para hallar la distancia en términos del tiempo se llama **función**. Se dice que la distancia es una función del tiempo. Para entender mejor esta regla o función, se puede construir una tabla de valores o dibujar una gráfica. La gráfica permite ver con facilidad qué tan lejos y qué tan rápido cae la piedra.

Tiempo t	Distancia $d(t)$
0	0
1	16
2	64
3	144
4	256



Usted puede observar por qué son importantes las funciones. Por ejemplo, si un físico encuentra la "regla" o función que relaciona la distancia recorrida con el tiempo transcurrido, entonces puede predecir cuándo un misil chocará con el suelo. Si un biólogo halla la función o "regla" que relaciona el número de bacterias en un cultivo con el tiempo, entonces puede predecir el número de bacterias para algún tiempo futuro. Si un agricultor conoce la función o "regla" que relaciona la producción de manzanas con la cantidad de árboles por acre, entonces puede decidir cuántos árboles plantar por acre para maximizar la producción.

B.2. PRODUCTO CARTESIANO.



<https://www.youtube.com/watch?v=wOAJ2YhfSPY>

<https://www.youtube.com/watch?v=iZ8yZANNRDA&t=9s>

<https://www.youtube.com/watch?v=PJzxw7gWX6Y>

Sean A y B conjuntos. Al conjunto formado por todos los pares ordenados de primera componente en A y segunda componente en B, se le denota $A \times B$ y se le llama *producto cartesiano* de A y B. Simbólicamente:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}.$$

En consecuencia:

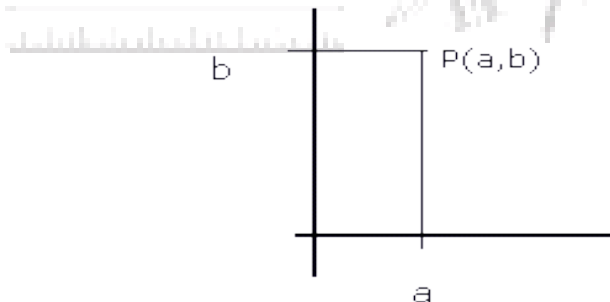
$$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

$$(x, y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B$$

En particular, siendo \mathbb{R} el conjunto de los números reales, se tiene:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el conjunto de todas las parejas de números reales. La representación geométrica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el *plano cartesiano* llamado también plano numérico.



Se establece una relación biunívoca entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y el conjunto de los puntos del plano geométrico, asociándose de esta forma el par ordenado (x, y) con el punto $P(x,y)$.

Ejemplo 1:

Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$; por lo tanto el producto cartesiano $A \times B$ será:

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

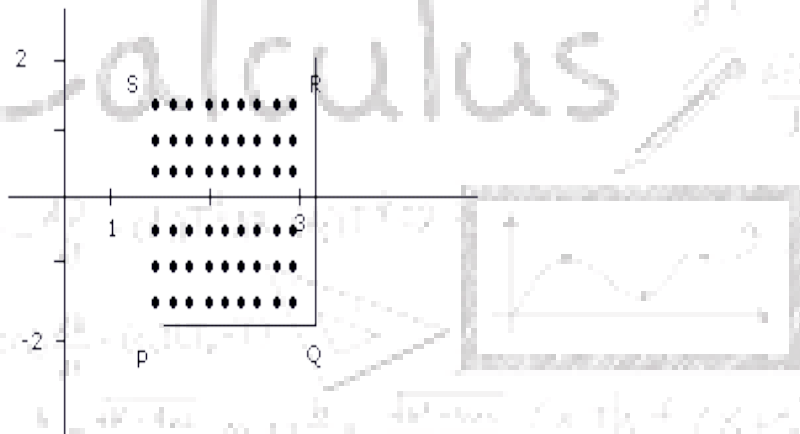


Ejemplo 2:

Sean $A = \{ x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 3 \}$,

$B = \{ x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 2 \}$.

En consecuencia la representación geométrica de $A \times B$ es:

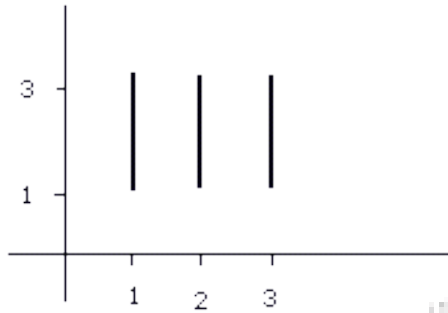


$A \times B$ es el conjunto de los puntos interiores al rectángulo PQRS y los puntos que pertenecen a los segmentos PQ y QR.

Ejemplo 3:

Sean $A = \{ x \in \mathbb{N} / 1 \leq x < 4 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 3 \}$.

Representar $A \times B$ en el plano cartesiano.



Nota: La definición de producto cartesiano puede generalizarse al producto entre n conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n . En este caso, al conjunto formado por todas las n -adas ordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) tales que $a_i \in A_i$ con $i = 1, 2, \dots, n$, se llama *producto cartesiano de A_1, A_2, \dots, A_n* y se denota $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

B.3. RELACIONES

SOPORTE ONLINE:

<https://www.youtube.com/watch?v=gVCmLDCovmo>

<https://www.youtube.com/watch?v=to55obWB0Bo>

<https://www.youtube.com/watch?v=czDGw8FWVBE>

Es probable que, antes de entrar a definir qué son las Relaciones algebraicas, sea conveniente revisar de forma breve algunas definiciones, que permitirán entender esta categoría matemática dentro de su contexto preciso.

En este sentido, puede que sea pertinente entonces abordar los conceptos de **Conjunto, elemento, pertenencia y subconjunto**, pues tener presente estas definiciones ayudará a entender mucho mejor la terminología relacionada con el concepto de relaciones algebraicas. A continuación, cada uno de estos conceptos:

Conjunto:

Con respecto al Conjunto, este es visto como una **agrupación de elementos, entre los cuales puede identificarse al menos un rasgo en común**, de ahí que también sean interpretados como una colección abstracta de elementos que pertenecen a una misma naturaleza, lo cual también puede ser visto como otra definición de Conjunto. Así mismo, los elementos del conjunto, además de la cualidad de compartir entre ellos rasgos o características comunes, son los responsables de definir y constituir propiamente al conjunto, función que les corresponde además de una forma única y

Elemento:

Por otra parte, la Teoría de Conjuntos define al Elemento como cada **uno de los objetos que se encuentran dentro del Conjunto**, y cuya agrupación –basada en los caracteres o rasgos en común– permite definir y constituir este tipo de colección abstracta. De igual forma, esta disciplina matemática ha determinado que el Elemento sostiene con el objeto llamado conjunto una relación de Pertenencia.

Pertenencia:

Como su nombre lo indica, la Pertenencia será una **relación matemática, existente entre cada uno de los elementos y el conjunto al cual pertenecen**, o dentro del cual se encuentra incluido. En el caso concreto de los conjuntos, se dice que los elementos de un conjunto pertenecen a él, como forma de indicar entonces que ese elemento preciso puede hallarse en un conjunto determinado, y no en otro. El símbolo para representar la pertenencia será \in , mientras que la forma de indicarla será la siguiente:

Suponiendo un conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ indicar las relaciones de pertenencia que existen entre ellas:

$$2 \in A$$

$$4 \in A$$

$$6 \in A$$

$$8 \in A \text{ y,}$$

$$10 \in A$$

Subconjunto:

Finalmente, otra de las definiciones que será necesario tener presente, previo a enfrentar la definición de Relaciones algebraicas será la de Subconjunto, concepto que puede ser explicado como **todo conjunto o colección que se encuentra incluida dentro de un conjunto mayor**. El símbolo para indicar que un grupo de elementos es subconjunto de una colección será \subset . No obstante, la mejor forma de entender esta definición será a través de la exposición de un ejemplo:

Suponiendo un conjunto $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ determinar si el conjunto $C = \{1, 3, 5\}$ puede ser considerado un subconjunto de B:

Para cumplir con lo solicitado por este postulado será necesario tomar en cuenta cada uno de los elementos de C, a fin de determinar si realmente se encuentran de forma plena dentro de B. Sin embargo, existe una operación para determinar si esto es así: la intersección, destinada a constituir una

tercera colección conformada por los elementos comunes. Si el resultado coincide en todos sus elementos con el conjunto que quiere identificarse como subconjunto será porque ciertamente lo es:

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$C = \{1, 3, 5\}$$

$$B \cap C = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 3, 5\}$$

$$B \cap C = \{1, 3, 5\}$$

$$C = B \cap C \rightarrow C \subset B$$

B.3.1. Relaciones Algebraicas Binarias

SOPORTE ONLINE:

<https://www.youtube.com/watch?v=qA1v4iv3OXs>

<https://www.youtube.com/watch?v=5tHFK836GuI>

Por su parte, las Relaciones algebraicas binarias serán comprendidas como todo tipo de relación en la que los elementos de un conjunto primero –bien si son todos o solo algunos de ellos- establecen relaciones con los elementos de un conjunto segundo, conformando entonces a su vez un conjunto de pares ordenados, los cuales pueden ser identificados a su vez como subconjuntos del producto cartesiano de dichos conjuntos: $A - R - B \rightarrow R \subset A \times B$.

DOMINIO

SOPORTE ONLINE:

https://www.youtube.com/watch?v=tbf59qk_ass

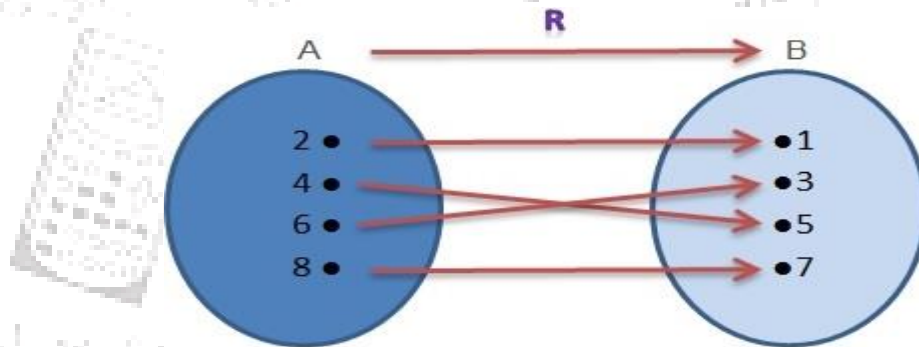
<https://www.youtube.com/watch?v=LQENbrvVGgM>

Así mismo, las Matemáticas apuntan a que el Dominio puede ser considerado como el subconjunto constituido por cada uno de los elementos del conjunto primero que establecen relación con los elementos del conjunto segundo. De igual forma, dentro de la expresión de los pares ordenados que conforman las relaciones binarias, el Dominio será considerado como **cada uno de los primeros elementos de dichos pares.**

RANGO

También conocido como Recorrido, el Rango constituirá por su parte un subconjunto constituido por cada uno de los elementos del conjunto segundo que ha llegado a establecer algún tipo de relación con el conjunto primero. Por consiguiente, en la expresión de los pares ordenados que conforman las relaciones binarias entre dos conjuntos, el Rango **será conformado por todos los segundos elementos de los pares** que se generan en base a la relación.

Un ejemplo de este tipo de relación puede ser el siguiente:



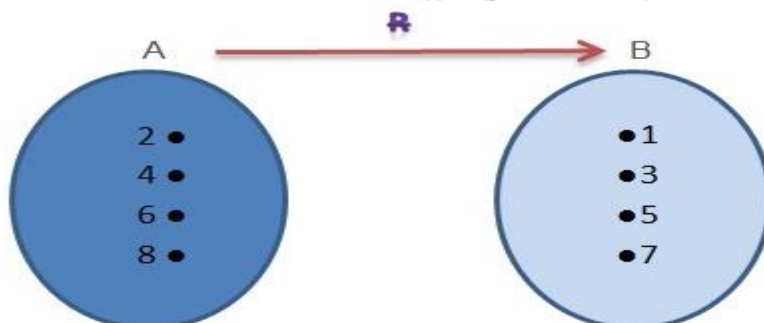
B.3.2. Relaciones Binarias Vacías

No obstante, también puede suceder que **teniendo dos conjuntos A y B no se establezca ningún tipo de relación entre los elementos de estas colecciones**, en cuya situación se hablará entonces de Relación vacía, la cual se representará a su vez a través del signo $R = \{ \}$. Un ejemplo de esto podría ser el siguiente:

Suponiendo un conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y un conjunto $B = \{1, 3, 5, 7\}$ representar la Relación vacía entre ellos:

Para hacerlo, será necesario dibujar cada conjunto, demostrando cómo ningún elemento de A (Dominio) y B (rango) guardan nexos o relaciones entre ellos:

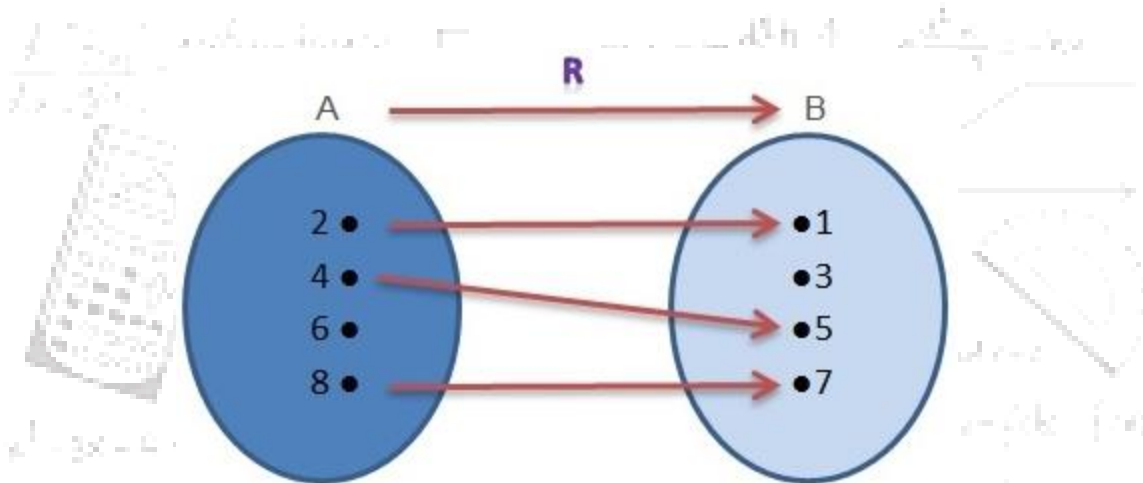
Un ejemplo de este tipo de relación puede ser el siguiente:



Por su parte, la Relación entre A y B podrá ser representada como $R = \{ \}$ (conjunto vacío).

B.3.3. Relaciones Inversas

Teniendo presente estas definiciones, probablemente sí sea mucho más sencillo aproximarse a la definición de Relaciones inversas, las cuales son entendidas como las **relaciones algebraicas que suceden en sentido contrario**. Es decir, por lo general, las relaciones binarias serán entendidas como $A \rightarrow B$:



En donde entonces, los elementos de A se relacionan con B, dando origen a las siguientes relaciones binarias:

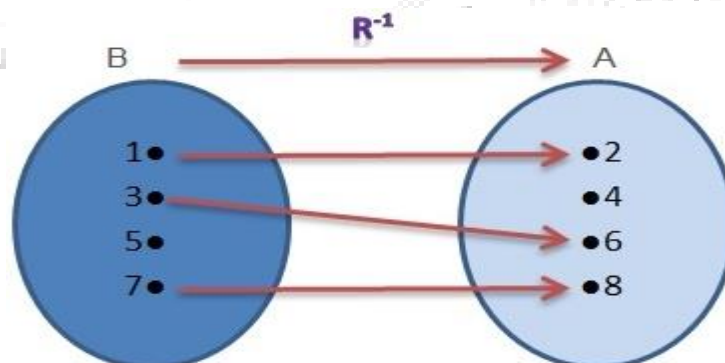
Ejemplo 4. $R = \{(2,1); (4,5); (8,7)\}$

Así mismo, de esta relación se inferirán tanto el Dominio como el Rango:

$\text{dom}(R): \{2, 4, 8\}$

$\text{rang}(R): \{1, 5, 7\}$

Sin embargo, **en el caso de las Relaciones inversas**, este tipo de relación binaria será expresada en su forma R^{-1} haciendo entonces que los conjuntos inviertan sus posiciones originales, así como que el Dominio ocupe el lugar del Rango, y el Rango del Dominio, dando como resultado también una relación en donde los pares ordenados son inversos, tal como se muestra a continuación:



Ejemplo 5. De esta forma, mientras que la relación binaria sería de forma $A \mathbf{R} B$, la relación inversa sería $B \mathbf{R}^{-1} A$.

Igualmente, en el caso de los pares ordenados que se generarían, se encontrarían los siguientes:

$$R^{-1} = \{(1,2); (3,6); (7,8)\}$$

B.3.4. Funciones



<https://www.youtube.com/watch?v=H40lcwlgPMk>

<https://www.youtube.com/watch?v=glhFLEZgnrE>

<https://www.youtube.com/watch?v=mJHFupbz9Fs>

En matemáticas, se dice que una magnitud o cantidad es **función** de otra si el valor de la primera depende exclusivamente del valor de la segunda.

De forma más abstracta, el concepto general de **función** se refiere en matemáticas a una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto.

Por ejemplo, una función sería el área de un círculo, ya que el área depende de la medida del radio.

El valor del área es proporcional al cuadrado del radio, $A = \pi \cdot r^2$

Entonces, se dice que el área a de un círculo *es función* de su radio.

A la primera magnitud (el área) se la denomina variable dependiente, y la cantidad de la que depende (el radio) es la variable independiente.

DOMINIO

El dominio de una función son los valores para los cuales la función está definida o, en otras palabras, es el conjunto de todos los posibles valores que la función acepta.

Por ejemplo:

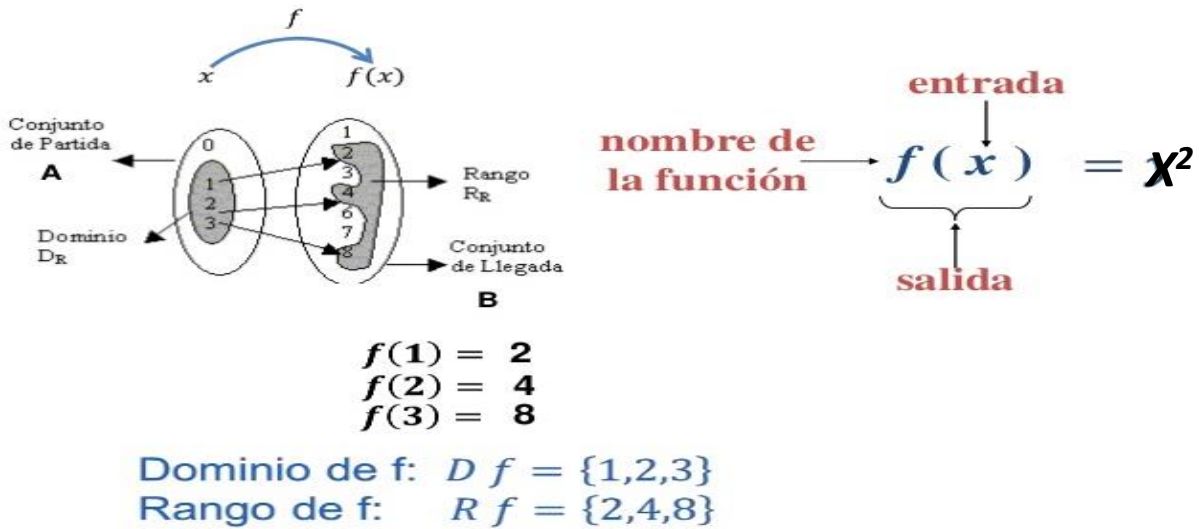
Si la función $f(x) = x$ al cuadrado, se le dan los valores $x = \{1,2,3,\dots\}$ entonces $\{1,2,3,\dots\}$ es el dominio.

RANGO

El rango de una función es el conjunto de todos los valores de salida de una función o es el conjunto formado por todos los valores que puede llegar a tomar la función.

Ejemplo: si a la función $f(x) = x^2$ se le dan los valores $x = \{1,2,3,\dots\}$ entonces el rango será $\{1,4,9,\dots\}$

Ejemplo 6.

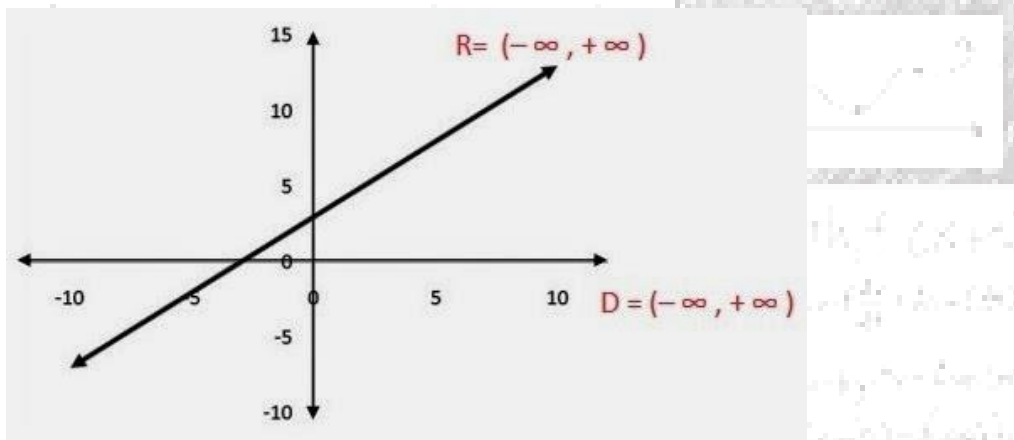


Ejemplo 7 – Función Lineal: Determinar Dominio y Rango de $f(x) = X + 3$

Lo primero que hacemos es tabular valores de los pares ordenados x, y para representarlos en el plano cartesiano:

y=x+3		x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y		-1	0	1	2	3	4	5	6	7	

Ahora ubicamos cada pareja en el plano y unimos los puntos para obtener la gráfica de nuestra función.



Como podemos ver, la gráfica es una línea recta. Este tipo de función se conoce como lineal y representa a los polinomios de grado 1.

Dominio de la función

Como es una función lineal el dominio será todo el conjunto de los números reales (puede tomar cualquier valor negativo o positivo sin restricción alguna).

Dom $f(x) = \mathbb{R}$ o también puede expresarse **Dom $f(x) = (-\infty, +\infty)$**

Rango de la función

El Rango será también todo el conjunto de los números reales. Seguimos el eje “Y” de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre.

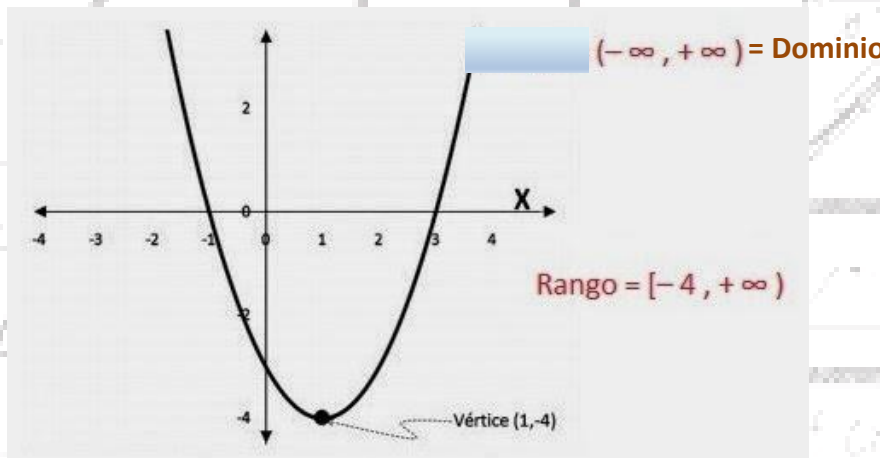
Rango = $(-\infty, +\infty)$

Ejemplo 3: Función Cuadrática: Determinar Dominio y Rango de $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Tabulamos valores de los pares ordenados x,y para representarlos en el plano cartesiano:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

Ahora ubicamos cada pareja en el plano y unimos los puntos para obtener la gráfica de nuestra función.



Como podemos ver, la gráfica es una parábola. Este tipo de función se conoce como cuadrática y representa a los polinomios de grado 2.

Dominio de la función

Como es una función polinómica de segundo grado el dominio será todo el conjunto de los números reales (siempre tomará valores tanto negativos como positivos en el eje x).

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Rango de la función

Note cómo la gráfica empieza a tomar valores en el eje y sólo a partir de un punto determinado. Por lo tanto, en este caso, el rango ya no serán todos los reales.

Para hallar el Rango, debemos determinar a partir de qué punto la función empieza a tomar valores en el eje y. Esto ocurre en el vértice de la función.

El vértice de una función cuadrática se define como $(-b/2a, f(-b/2a))$ reemplazando valores tenemos que $-b/2a = -(-2)/2(1) = 1$. Este es el valor de x en el vértice.

Ahora reemplazamos este valor de x en la función original para conocer el valor de y en el vértice:

$$f(1) = 1^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

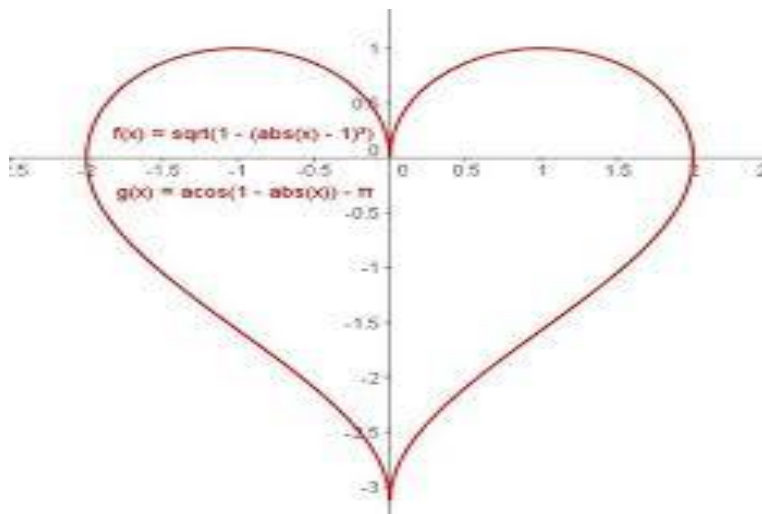
Por lo tanto, el vértice está en el punto $(1, -4)$.

El eje “Y” empieza a tomar valores (de abajo hacia arriba) a partir de -4 .

Rango = $[-4, +\infty)$

- El paréntesis cerrado [o] significa que el valor está incluido en el intervalo.
- El paréntesis abierto (o) significa que el valor no está incluido en el intervalo.

***LAS MATEMATICAS TAMBIEN
TIENEN CORAZON***



B.3.5. Probabilidad Condicional – Aplicaciones

SOPORTE ONLINE:

<https://gieao.wordpress.com/material-de-estudio/>
<https://www.youtube.com/watch?v=S7W5Tlpa3mA>
<https://youtu.be/dStF9z7tjZU>
<https://youtu.be/xZeHDwrPG9U>

Como la probabilidad está ligada a nuestra ignorancia sobre los resultados de la experiencia, el hecho de que ocurra un suceso, puede cambiar la probabilidad de los demás. El proceso de realizar la historia clínica, explorar y realizar pruebas complementarias ilustra este principio.

La probabilidad de que ocurra el suceso A si ha ocurrido el suceso B se denomina *probabilidad condicionada* y se define

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \text{si } p(B) \neq 0$$

Esta definición es consistente, es decir cumple los axiomas de probabilidad.

Ejemplo 1. Una mujer es portadora de la enfermedad de Duchenne ¿Cuál es la probabilidad de que su próximo hijo tenga la enfermedad?

Según las leyes de Mendel, todos los posibles genotipos de un hijo de una madre portadora (xX) y un padre normal (XY) son xX, xY, XX, XY y tienen la misma probabilidad. El espacio muestral es $W = \{xX, xY, XX, XY\}$ el suceso $A = \{\text{hijo enfermo}\}$ corresponde al genotipo xY, por tanto, según la definición clásica de probabilidad $p(A) = 1/4 = 0,25$

La mujer tiene el hijo y es varón ¿qué probabilidad hay de que tenga la enfermedad?

Se define el suceso $B = \{\text{ser varón}\} = \{xY, XY\}$ la probabilidad pedida es $p(A|B)$ y aplicando la definición anterior $p(B) = 0,5$; $A \cap B = \{xY\}$; $p(A \cap B) = 0,25$; $p(A|B) = 0,25/0,5 = 0,5$

Si sabemos que es varón, el espacio muestral ha cambiado, ahora es B. Por lo tanto se puede calcular $p(A|B)$ aplicando la definición clásica de probabilidad al nuevo espacio muestral $p(A|B) = 1/2 = 0,5$

Ejemplo 2: Se sabe que el 50% de la población fuma y que el 10% fuma y es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hipertenso?

$A = \{\text{ser hipertenso}\}$ $B = \{\text{ser fumador}\}$

$A \cap B = \{\text{ser hipertenso y fumador}\}$

Por lo tanto, $p(A|B) = 0,10/0,50 = 0,20 = 20\%$

Ejemplo 3: Una urna contiene 10 bolas, de las cuales 3 son rojas, 5 verdes y 2 azules. Se extraen al azar 3 bolas. Calcular la probabilidad de que la primera sea azul, y las otras dos verdes.

Definimos $A_1 = \{\text{la 1}^{\text{a}} \text{ bola es azul}\}$; $A_2 = \{\text{la 2}^{\text{a}} \text{ bola es verde}\}$; $A_3 = \{\text{la 3}^{\text{a}} \text{ bola es verde}\}$

$p(A_1) = 2/10$ aplicando la definición clásica de probabilidad, puesto que hay 10 bolas y 2 son verdes.

$p(A_2|A_1) = 5/9$; si la primera bola extraída es azul, en la urna quedan 9 bolas, 5 de ellas verdes.

$p(A_3|A_1 \cap A_2) = 4/8$; si la primera bola extraída es azul y la segunda verde en la urna quedan 8 bolas, 4 de ellas verdes. En consecuencia: $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 2/10 \times 5/9 \times 4/8 = 1/18$

C. PRACTIQUEMOS - ACTIVIDAD CON INTERACTIVIDAD

**INTERACTUA, JUEGA Y SUPERATE,
INTENTALO CUANTAS VECES SEA NECESARIO**

1. Plano cartesiano interactivo: Educaplay

https://es.educaplay.com/recursos-educativos/693532-plano_cartesiano.html

2. Simulador plano cartesiano: Geogebra

<https://www.geogebra.org/m/QJHTtUVx>

3. Localizador de un punto en un plano: EduMedia

<https://junior.edumedia-sciences.com/es/media/828-localizar-un-objeto-en-un-plano>

4. Ejercicios interactivos de función I: Superprof

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/ejercicios-interactivos-de-funcion-i.html>

5. Ejercicios interactivos de dominio de una función: Superprof

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/ejercicios-interactivos-de-dominio-de-una-funcion.html>

6. Ejercicios interactivos propuesto y resueltos sobre dominio de todo tipo de funciones: Superprof

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/ejercicios-del-dominio-de-una-funcion.html>

7. Dominio y rango de funciones a partir de sus graficas: Khan Academy

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:funciones/x2f8bb11595b61c86:introduction-to-the-domain-and-range-of-a-function/e/domain_and_range_0.5

8. Dominio y rango de una funcion – interactiva: Matesfacil

<https://www.matesfacil.com/ESO/dominio/ejercicios-resueltos-dominio-recorrido-imagen-funciones.html>

9. Dominio y rango de funciones: EducaPlay

https://es.educaplay.com/recursos-educativos/1009524-dominio_y_rango_de_funciones.html

10. Encuentre dominio y rango de relaciones preguntas de matemáticas con soluciones detalladas: Free mathematics tutorials

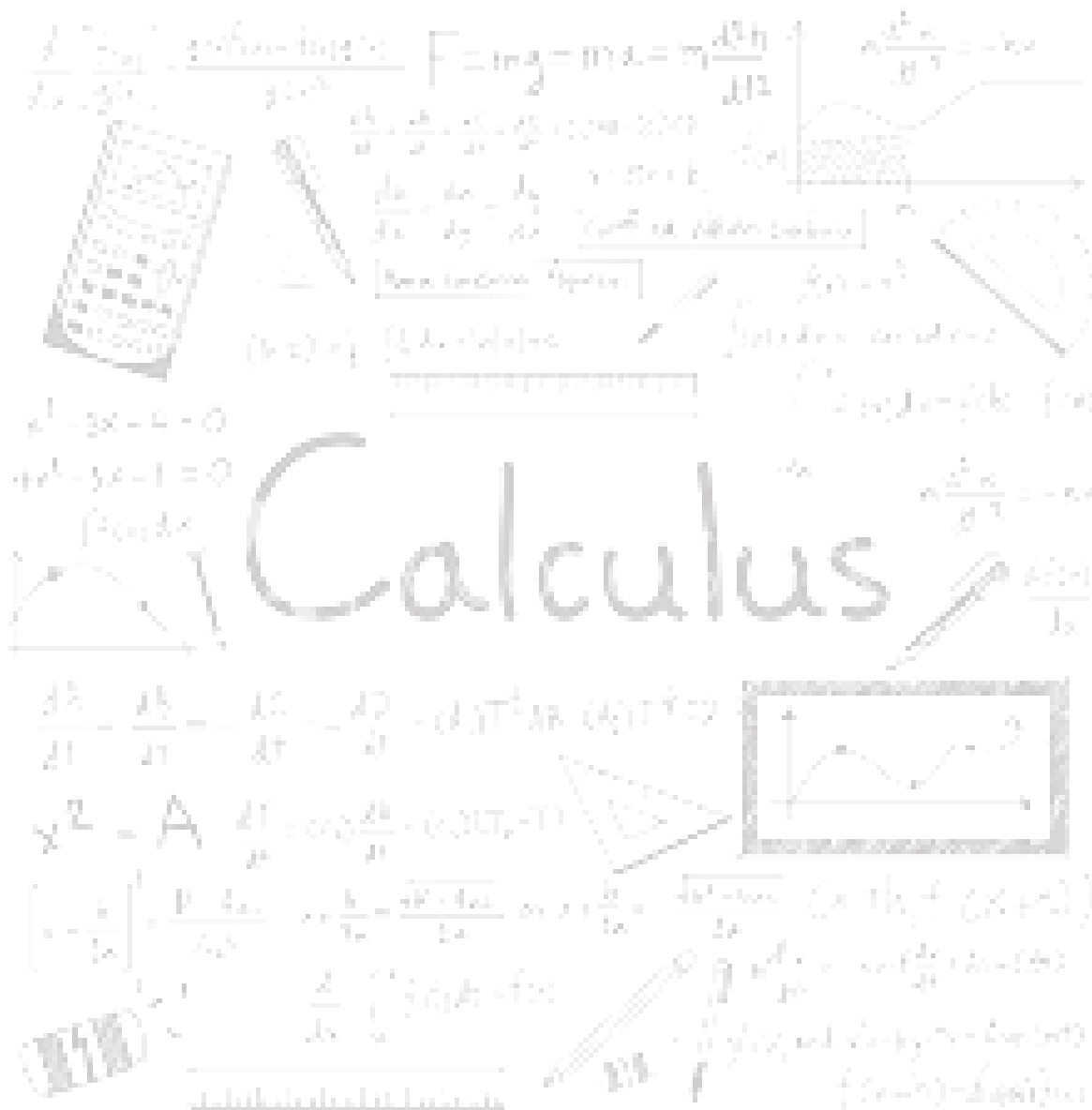
https://www.analyze-math.com/spanish/high_school_math/grade_11/domain_range_rel.html

11. Problemas con probabilidad condicionada: Superprof

<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/probabilidades/combinatoria/problemas-de-probabilidad-condicionada.html>


12. Probabilidad condicional, ejercicios resueltos: Matemáticas, física y mucho mas

<https://matemovil.com/probabilidad-condicional-ejercicios-resueltos/>



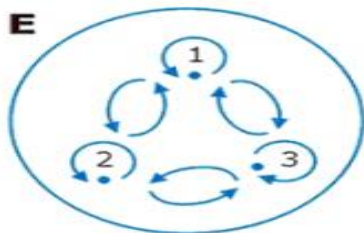
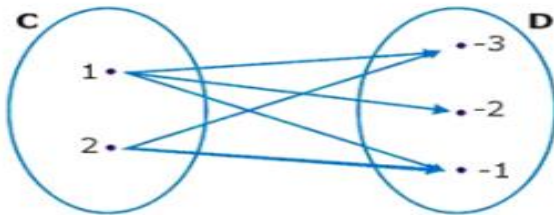
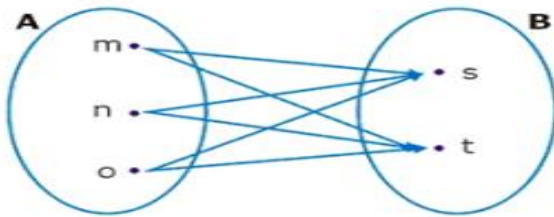
D. ACTIVIDAD INDIVIDUAL – EJERCITA Y FUNDAMENTA

D1. Taller Laboratorio Sobre Producto Cartesiano I

- Contesta las siguientes preguntas
 - Si A posee 3 elementos y B posee 5 elementos, ¿cuántos elementos posee $A \times B$?
 - Si $C \times D$ tiene 8 parejas ordenadas y C tiene 2 elementos, ¿cuántos elementos tiene D?
 - Si $M \times N$ tiene 56 parejas ordenadas y N tiene 8 elementos, ¿cuántos elementos tiene M?
 - $A \times B$ es igual a $B \times A$?
- Obtener el producto cartesiano $A \times B$ de los siguientes conjuntos:
 $A = \{w, x, y\}$
 $B = \{1, 5, 7\}$
- Obtener el producto cartesiano $A \times B$ de los siguientes conjuntos y representar mediante diagrama cartesiano:
 $A = \{-3, 0, 5, 9\}$
 $B = \{p, q, r, t\}$
- Obtener el producto cartesiano $A \times B$ de los siguientes conjuntos y representar mediante *diagrama cartesiano*:
 $A = \{\text{arroz blanco, arroz de coco, arroz de frijol}\}$
 $B = \{\text{carne asada, carne guisada, pescado, pollo}\}$ 
- En el curso de baile estamos Sebastián, Ángel, Diana, Daniel, Kelly, María, Pedro, Alejandra y David.
Mostrar mediante diagrama cartesiano las diferentes parejas que se pueden formar.
- En el uniforme de futbol del colegio tenemos camisetas blancas, camisetas azules y camisetas verdes y tenemos pantalonetas cafés, blancas, rojas y negras. Mostrar mediante *diagrama sagital* y *diagrama cartesiano* las diferentes formas en que podemos uniformarnos para un partido de futbol.

D2. Taller Laboratorio Sobre Producto Cartesiano II

1. Dados los siguientes diagramas sagitales, determinar por extensión los conjuntos y el producto cartesiano.



2. Dados los conjuntos:

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$B = \{1\}$$

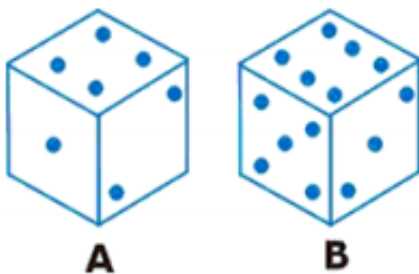
$$C = \{-5, 5\}$$

$$D = \{1, 4\}$$

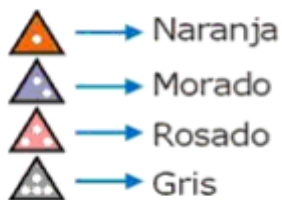
Hallar y ubicar en el plano cartesiano

- AXB
- CXD
- AXD
- CXA

3. Si los números de un dado forman el conjunto A y los números del otro dado forman el conjunto B, escribe el conjunto de todas las parejas ordenadas formadas por los lanzamientos. ¿ $A \times B = B \times A$?



4. Si lanzaras un dado de seis caras y otro de cuatro caras, cuyas caras están coloreadas así:



- Representa los conjuntos F y G respectivamente. Determina los conjuntos de parejas de colores.
 - $F \times G$
 - $G \times F$
 - $G \times G$
 - $F \times F$
 - ¿Son los conjuntos $F \times G = G \times F$?
 - ¿Cuántos elementos tiene cada conjunto?
 - Representa con la notación numérica los elementos del conjunto $G \times F$ en el diagrama cartesiano.
 - ¿Cuántos elementos $x = y$ tienen los conjuntos $G \times G$ y $F \times F$ respectivamente?
5. ¿Qué significado tiene para usted la siguiente pintura?

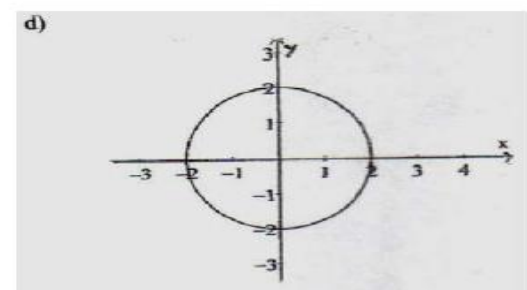
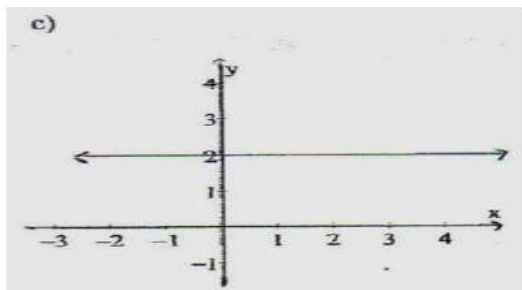
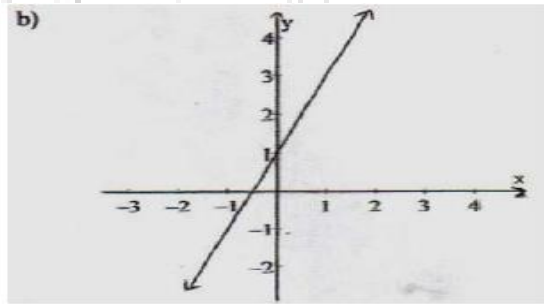
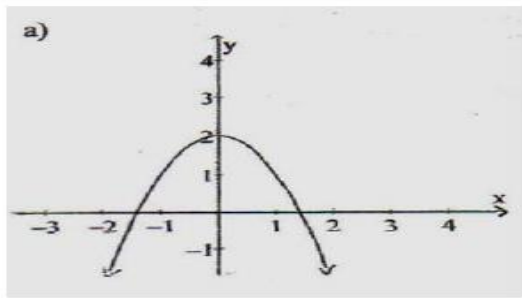


D3. Taller Laboratorio Sobre Análisis funcional

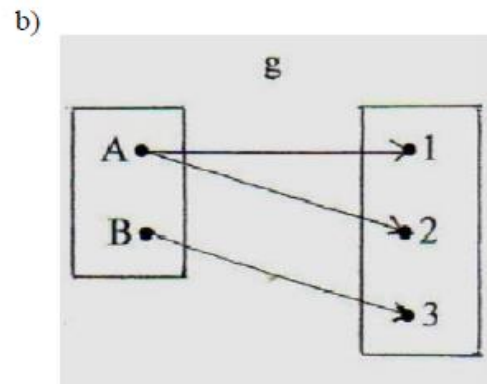
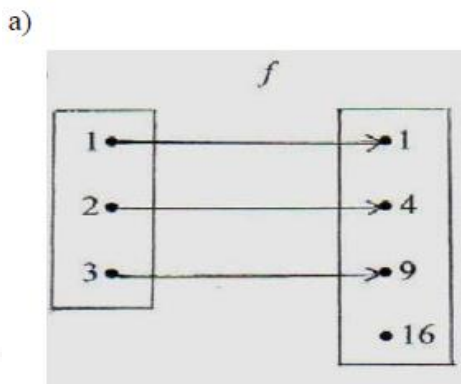
1. ¿Cuáles de las siguientes relaciones representan funciones?

- a) $f = \{(2,-2), (-3,3), (4,-4), (-5,5)\}$
- b) $g = \{(5,2), (1,3), (5,4)\}$
- c) $F = \{(x, y) : |x + 4| - y = 0\}$
- d) $G = \{(x, y) : (y - 1)^2 + (x + 7)^2 = 8\}$

2. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones?



3. ¿Cuáles de las siguientes correspondencias representan funciones?



4. Sea $f(x) = 1/x$. Halla:

a) el dominio de f

b) $f\left(\frac{-3}{5}\right)$

c) $f(\sqrt{3})$

d) $f\left(\frac{1}{a}\right)$

e) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$

5. Halla el dominio de las siguientes funciones:

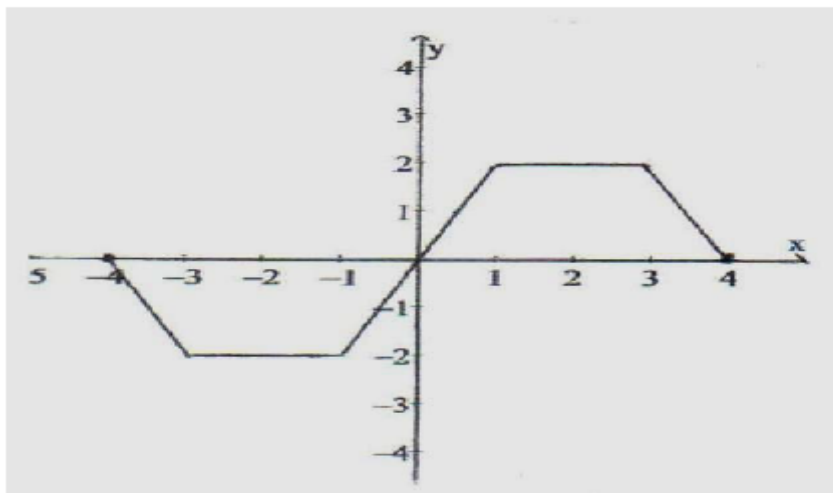
a) $f(x) = x^5 - 3x^3 - \sqrt{2}$

c) $h(t) = \frac{t^2 - 4t + 2}{t^2 - 5}$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x-5}$

d) $G(n) = \frac{9\sqrt{n} - 5\sqrt[3]{3n+4}}{10}$

6. Usando la gráfica de la función f que aparece a continuación, halla:



a) dominio

b) campo de valores

c) $f(0)$

d) $f(-2)$

e) interceptos en el eje de x

f) intercepto en el eje de y

g) ceros de f

h) simetría de la gráfica (si la tiene)

i) intervalos donde f es:

1) creciente

2) decreciente

3) constante

j) valores de x donde:

1) $f(x) = 2$

2) $f(x) < 0$

3) $f(x) \geq 0$

7. Resuelve completamente el siguiente ejercicio:

Sea $f(x) = 4x + 3$ y $g(x) = \frac{x}{x-2}$. Halla:

a) $f(-2)$

b) $f\left(\frac{1}{8}\right)$

c) $f(5n)$

d) $f(x+h)$

e) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$

f) D_f

g) $g(4)$

h) $g\left(\frac{-1}{2}\right)$

i) $g(3a)$

j) $g(x+h)$

k) $\frac{g(x+h) - g(x)}{h}, h \neq 0$

l) D_g

E. PRACTIQUEMOS E INTERACTUEMOS +

1. Ejemplos de operaciones de Productos cartesianos de conjuntos: El pensante – educación

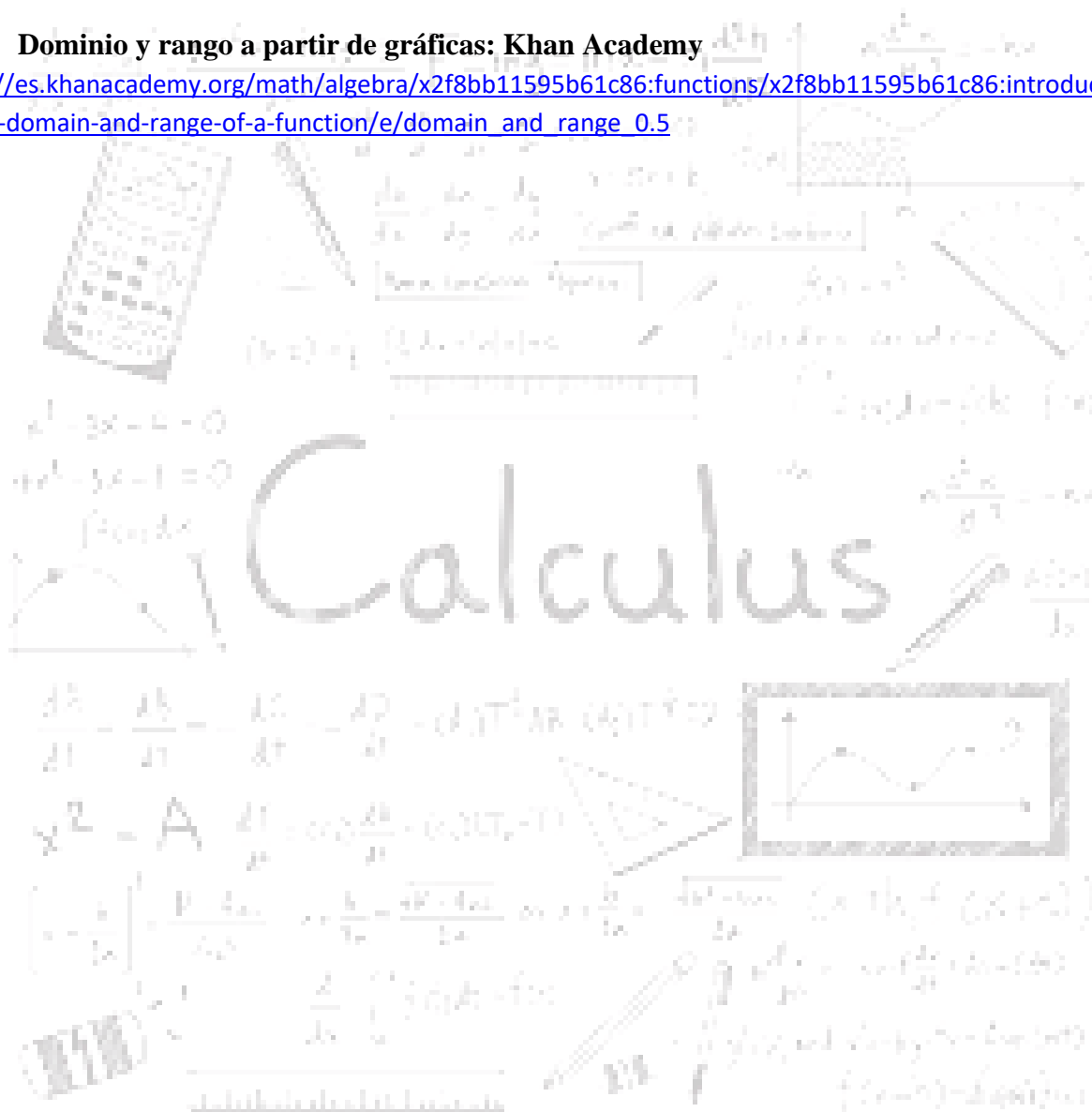
<https://educacion.elpensante.com/ejemplos-de-operaciones-de-productos-cartesianos-de-conjuntos/>

2. Producto y plano cartesiano, ejemplos resueltos (Hasta antes de propiedades): Wikipedia

https://es.wikipedia.org/wiki/Producto_cartesiano

3. Dominio y rango a partir de gráficas: Khan Academy

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:introduction-to-the-domain-and-range-of-a-function/e/domain_and_range_0.5



E. ESTRATEGIA DE EVALUACION

E.1. Presentar los talleres D1, D2 y D3.

E.2. Desarrolla el siguiente cuestionario, justifica en cada punto tu respuesta, desarrollando paso a paso.

<https://drive.google.com/file/d/195nkKxt0bL2sOrrI-MRrEOwZgOJJsUML/view>

F. BIBLIOGRAFIA

Ésta está relacionada en cada una de las secciones SOPORTE ONLINE, así como también en cada uno de los apartes de **PRACTIQUEMOS E INTERACTUEMOS Y PRACTIQUEMOS E INTERACTUEMOS +**

